

## ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ

*Цель: изучение центрального упругого удара шаров, измерение времени соударения шаров.*

### Введение

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. *Абсолютно упругим* называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие немеханические виды энергии. *Абсолютно неупругий удар* характеризуется тем, что кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию.

В данной работе изучается центральный упругий удар шаров. В этом случае скорости шаров до удара направлены вдоль прямой, соединяющей их центры. Кинетическая энергия сталкивающихся шаров может быть представлена в виде

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2},$$

где  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $v_1$  и  $v_2$  -- массы и скорости соответствующих шаров в момент удара;

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  - приведенная масса системы;

$V$  - скорость центра масс шаров;

$v$  - относительная скорость шаров в момент удара.

При столкновении шаров кинетическая энергия  $(m_1 + m_2)V^2/2$ , связанная с движением центра масс, измениться не может, так как не может измениться скорость самого центра масс.

Претерпевает при ударе превращение только кинетическая энергия  $\mu v^2/2$  относительного движения шаров.

Так как движение центра масс интереса не представляет, то дальнейшее рассмотрение проведем в системе центра масс. В этой системе процесс соударения протекает следующим образом: за первую половину времени удара (при сближении тел) происходит переход кинетической энергии относительного движения в потенциальную энергию

упругой деформации, а за вторую (при удалении тел) - потенциальная энергия целиком переходит обратно в кинетическую. В некоторый момент вся кинетическая энергия относительного движения переходит в потенциальную энергию упругодеформированных шаров. Очевидно, что в этот момент шары покоятся, а их деформация достигает максимума.

В приложении 1 показано, что для металлических шаров, используемых в данной работе, время соударения можно представить в виде:

$$\tau = 5,6 \frac{R}{v_0} \left( \frac{v_0}{v} \right)^{1/5} \quad (1)$$

где  $R$  - радиус шаров;  $v_0$  - скорость звука в материале шаров.

Силы, возникающие при деформации шаров, в течение соударения как-то меняются со временем. Найдем среднюю по времени силу, действующую на один из шаров.

По определению среднего

$$\bar{F} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \dot{F}(t) dt.$$

Согласно второму закону динамики,  $\dot{F}(t) = d\bar{p}/dt$ , откуда

$$\langle \bar{F} \rangle = \Delta\bar{p}/\tau,$$

Где,  $\Delta\bar{p}$  - приращение импульса одного из шаров в процессе удара.

Модуль средней силы

$$|\langle \bar{F} \rangle| = |\Delta\bar{p}|/\tau.$$

Если до удара один из шаров покоился и массы шаров одинаковы и равны  $m$ , то  $|\Delta\bar{p}| = mv$ , где  $v$  -- скорость налетающего шара в момент удара. Очевидно, что в этом случае скорость является относительной скоростью соударяющихся шаров.

С учетом уравнения (1) для модулей средней силы получим:

$$|\langle \bar{F} \rangle| = \frac{mv_0^2}{5,6R} \left( \frac{v_0}{v} \right)^{6/5} \quad (2)$$

В данной работе предлагается выполнить следующие действия измерить время соударения различных пар одинаковых шаров вычислить модуль средней силы, действующей на один из

шаров, построить графики зависимости этих величин от относительной скорости шаров (от скорости налетающего шара).

### Описание установки

Установка для изучения центрального удара шаров состоит из прибора, изображенного схематически на рис.1 и электронно-счетного частотомера ЧЗ-БЗ.

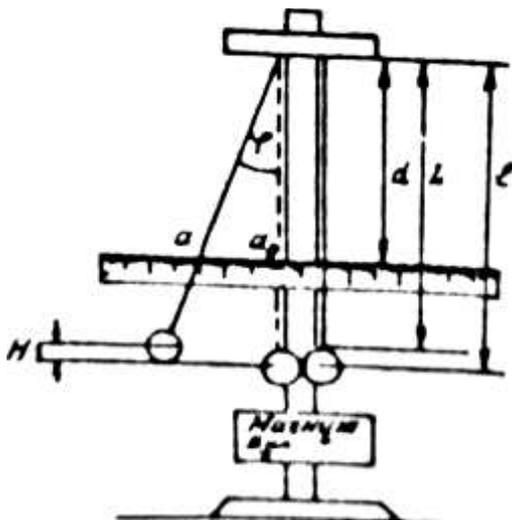


Рис 1

Один из шаров (рис 1) отводится из положения равновесия на угол  $\varphi$  и отпускается. Заметив крайнее отклонение нити по шкале перед ударом, можно. Используя закон сохранения энергии, определить импульс и скорость шара непосредственно перед ударом:

$$mgH = E_k, \quad E_k = p^2 / (2m) \quad (3)$$

Где  $H$ -высота подъема шара в крайнем положении;  $E_k$ -кинетическая энергия шара;  $p$ -его импульс непосредственно перед ударом.

При установлении связи между кинетической энергией  $E_k$  и импульсом  $p$  следует иметь в виду, что в рассматриваемом случае движение шара может быть представлено как наложение двух движений: поступательного движения по окружности радиуса  $l$  и вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр шара. В этом случае кинетическая энергия складывается из энергии поступательного и энергии вращательного движения. Однако легко показать, что в данном случае вклад энергии вращательного движения незначителен и с достаточной степенью точности уравнение (3) можно считать справедливым.

Как следует из рис. 1,

$$\begin{aligned} H &= l(1 - \cos\varphi) = 2l \sin^2(\varphi / 2); \quad v = 2\sqrt{lg} \sin(\varphi / 2); \\ p &= 2m\sqrt{lg} \sin(\varphi / 2), \end{aligned} \quad (4)$$

Угол  $\varphi$  определяется из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = (a - a_0) / d. \quad (5)$$

В работе используются металлические шары, подвешенные на проводах. Шары включены в электрическую цепь, состоящую из источника питания  $\varepsilon$  и сопротивления  $R$ . В момент  $t_1$ , начала соударения, цепь замыкается, появляется ток и на сопротивлении  $R$  возникает напряжение  $U_R$ . После окончания соударения (в момент  $t_2$ ) шары расходятся, цепь размыкается и напряжение  $U_R$  становится равным нулю. Таким образом, длительность сигнала, подаваемого на вход частотомера, равна времени соударения

$$\tau = t_1 - t_2.$$

Для удобства работы установка снабжена магнитным устройством для удержания шара в крайнем положении. Магнитное устройство обеспечивает перемещение магнита в вертикальном направлении вдоль штатива установки и в двух горизонтальных направлениях вдоль соответствующих направляющих.

## **Задание**

### *Измерение времени соударения шаров*

Приборы и принадлежности: 1) установка для исследования удара шаров; 2) две пары шаров, отличающихся материалом или радиусами; 3) масштабная линейка

1. Подвесить пару исследуемых шаров на проводах установки. Отрегулировать, если это необходимо, длину проводов так, чтобы шары соприкасались в точке, лежащей на одной горизонтали с центрами шаров. Шкалу, по которой производится отсчет угла отклонения шара, установить так, чтобы нулевое деление приходилось против нити левого шара, тогда  $a_0 = 0$  и  $\operatorname{tg} \varphi = a/d$

2. Измерить с помощью линейки длину  $L$  и расстояние  $d$  от точки подвеса до шкалы (см. рис. 1).

Результаты измерений вместе с погрешностями занести в заранее подготовленную табл. 1.

Таблица 1

|                |                |               |               |               |                   |
|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|-------------------|
| Материал шаров | $m, \text{кг}$ | $R, \text{м}$ | $L, \text{м}$ | $d, \text{м}$ | $l=L+R, \text{м}$ |
|                |                |               |               |               |                   |

Масса  $m$  и радиус  $R$  шаров вместе с погрешностями даны в таблице на рабочем столе.

3. Измерить длительность  $\tau_1$  для любой пары шаров. Для этого взять не менее пяти отклонений левого шара  $a$  через каждые 3 см.

Таблица 2

| $I$ | $a_i, \text{см}$ | $\tau_{ik}, \text{мкс}$ |   |   |   |   | $\langle \tau_i \rangle, \text{мкс}$ | $\Delta \tau_i$ |
|-----|------------------|-------------------------|---|---|---|---|--------------------------------------|-----------------|
|     |                  | 1                       | 2 | 3 | 4 | 5 |                                      |                 |
| 1   |                  |                         |   |   |   |   |                                      |                 |
|     |                  |                         |   |   |   |   |                                      |                 |

В качестве погрешности  $a_i$  принять  $\Delta a_i = \pm 3 \text{ мм}$ . Погрешность  $\Delta \tau_i$ , вычислить по формуле:

$$\Delta \tau_i = \left[ \sum_{k=1}^n (\tau_{ik} - \langle \tau_i \rangle)^2 / n(n-1) \right]^{1/2}.$$

6. Аналогичные измерения проделать для другой пары шаров.

7. Рассчитать постоянную  $B = 2(\lg)^{1/2} = 2[(L+R)g]^{1/2}$  в м/с.

Для каждого отклонения  $a$  по данным таблиц 1 и 2 вычислить:

А) относительную скорость соударения шаров  $v_i$  по формуле (4), используя постоянную  $B$ :

Б) модуль средней силы по формуле:

$$|\langle \vec{F} \rangle| = p_i / \langle \tau_i \rangle = m v_i / \langle \tau_i \rangle;$$

В) Логарифм соответствующих величин  $v_i, \tau_i, |\langle F \rangle|$ . Вычисления произвести для обеих пар шаров.

Результаты вычислений занести в заранее подготовленную таблицу 3.

Отметим, что для малых углов  $\varphi_i$  ( $\varphi_i < 0,2$  рад), что имеет место в настоящей работе, можно считать:

$$\sin(\varphi_i / 2) \approx \text{tg}(\varphi_i / 2) \approx \varphi_i / 2.$$

Таблица 3

| $i$ | $\text{tg} \varphi = a_i / d$ | $v_i = B \sin(\varphi_i / 2), \text{мс}$ | $\langle \tau_i \rangle, \text{с}$ | $ \langle F \rangle , \text{Н}$ | $\lg v_i$ | $\lg \tau_i$ | $\lg  \langle F_i \rangle $ |
|-----|-------------------------------|--|------------------------------------|---------------------------------|-----------|--------------|-----------------------------|
|-----|-------------------------------|--|------------------------------------|---------------------------------|-----------|--------------|-----------------------------|

|     |  |  |  |  |  |  |  |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|
| 1   |  |  |  |  |  |  |  |
| ... |  |  |  |  |  |  |  |

8. Для каждой пары шаров построить график теоретической зависимости  $\lg \tau$  от  $\lg v$ , используя для этого уравнение:

$$\lg \tau = \lg \left| 5,6R / v_0^{4,5} \right| - (1/5) \lg v,$$

следующее из формулы (1). Скорости звука  $v_0$  указаны в таблице на рабочем столе. Для построения графиков рекомендуется масштаб: по оси абсцисс  $0,1 = 50$  мм, по оси ординат  $0,1 = 20$  мм.

На графике нанести экспериментальные точки (для обеих пар шаров на одном листе). Для обозначения экспериментальных точек разных пар шаров использовать различные символы: маленькие кружки, треугольники и т.д. От каждой экспериментальной точки вверх, вниз, влево, вправо отложить отрезки, изображающие в масштабе чертежа погрешности результата. Расчет погрешностей произвести по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta(\lg v_i) &= \frac{\Delta(\lg v_i)}{\lg 10} = \frac{1}{2,3} \frac{\Delta v_i}{v_i} = \frac{1}{2,3} \left[ \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \varphi_i}{2 \operatorname{tg}(\varphi_i / 2)} \right)^2 \right]^{1/2} \approx \\ &\approx \frac{1}{2,3} \frac{\Delta a_i}{a_i}, \\ \Delta(\lg \tau_i) &= \frac{\Delta(\lg \tau_i)}{\lg 10} = \frac{1}{2,3} \frac{\Delta \tau_i}{\tau_i}. \end{aligned}$$

9. Для каждой пары шаров построить график теоретической зависимости  $\lg |\langle \vec{F} \rangle|$  от  $\lg v$ , используя формулу, следующую из выражения (2),

$$\lg |\langle \vec{F} \rangle| = \lg \left[ m v_0^{4,5} / (5,6R) \right] + (6/5) \lg v.$$

Масштаб графика продумать самостоятельно. На этом же графике нанести экспериментальные точки с соответствующими погрешностями ( для обеих пар шаров на одном листе)

Расчет погрешностей произвести по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta(\lg |\langle \vec{F}_i \rangle|) &= \frac{1}{2,3} \left[ \left( \frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left( \frac{\Delta v_i}{v} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \tau_i}{\tau_i} \right)^2 \right]^{1/2} \approx \\ &\approx \frac{1}{2,3} \left[ \left( \frac{\Delta a_i}{a_i} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \tau_i}{\tau_i} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

## **Контрольные вопросы**

1. Что называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим ударом?
2. Потенциальная энергия деформированных шаров при соударении имеет вид  $V = ah^{5/2}$ . Что такое  $h$ ? От чего зависит величина коэффициента  $a$ ?
3. Как выглядит соударение двух одинаковых шаров в лабораторной системе и в системе центра масс?
4. От каких параметров зависит время соударения шаров?
5. Как в данной работе определить относительную скорость соударяющихся шаров в момент удара?
6. Для чего используется электронно-счетный частотомер?
7. На каком принципе основано измерение времени соударения шаров частотомером?
8. В чем состоит назначение магнитного устройства?

### **Приложение 1**

Потенциальная энергия деформированных шаров в тот момент, когда они сближаются на расстояние  $h$  (рис 3), находится по формуле:

$$V = \frac{2}{5D} [R_1 R_2 / (R_1 + R_2)]^{1/2} h^{5/2},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы шаров;

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right),$$

$\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — коэффициенты Пуассона;  
 $E_1$  и  $E_2$  — модули Юнга.

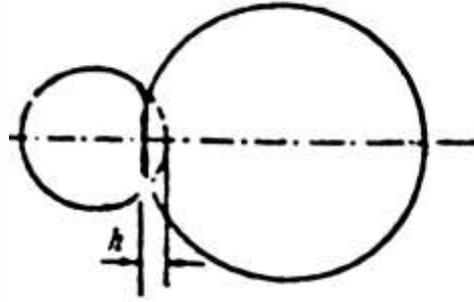


Рис 3

Кинетическую энергию шаров в системе центра масс можно представить в виде:

$$E_k = \frac{\mu}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2.$$

Из закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \frac{2}{5D} [R_1 R_2 / (R_1 + R_2)]^{1/2} h^{5/2}. \quad (\text{П.2})$$

Максимальное сближение шаров  $h_0$  соответствует моменту, когда их относительная скорость  $dh/dt$  обращается в нуль, и

$$h_0 = (\mu / \alpha)^{2/5} v^{4/5}, \quad \text{где } \alpha = \frac{4}{5D} [R_1 R_2 / (R_1 + R_2)]^{1/2}.$$

Время  $\tau$ , в течение которого длится соударение (т.е.  $h$  меняется от 0 до  $h_0$  и обратно до 0), получается интегрированием равенства (П.1):

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \int_0^{h_0} \frac{dh}{\left[ v^2 - \frac{\alpha}{\mu} h^{5/2} \right]^{1/2}} = 2 \left( \frac{\mu^2}{\alpha^2 v} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\left[ 1 - x^{2/5} \right]} = \\ &= 2,94 \left( \frac{\mu^2}{\alpha^2 v} \right)^{1/5}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Если соударяющиеся шары из одного материала ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ;  $E_1 = E_2 = E$ ) и одинаковых радиусов ( $R_1 = R_2 = R$ ), а также, что  $v_0 = (E/\rho)^{1/2}$  — скорость звука в материале шаров, то формулу (П.2) для времени соударения можно привести к виду:

$$\tau = 5,85 (1 - \sigma^2)^{2/5} \frac{R}{v_0} \left( \frac{v_0}{v} \right)^{1/5}.$$

В данной работе используются стальные и латунные шары: для стали  $\sigma=0.28$ , для латуни- 0,33. Поэтому в обоих случаях можно принять

$$(1 - \sigma^2)^{2/5} \approx 0,95.$$

Тогда время соударения будет

$$\tau = 5,6 \frac{R}{v_0} \left( \frac{v_0}{v} \right)^{4/5} .$$