Лабораторная работа

## Изучение вращательного движения при помощи крестового маятника. (Маятник Обербека)

**Приборы и принадлежности:** крестовой маятник, 4 муфты, дополнительные грузы, секундомер.

**Цель работы:** определение момента инерции крестового маятника и проверка основных закономерностей при вращательном движении твердого тела.

### Введение

Поступательное движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки (центра масс) с массой равной массе тела.

Поэтому все формулы поступательного движения совпадают с формулами, полученными для движения материальной точки. В случае вращательного движения такого совпадения нет, и требуется введение новых понятий.

### Угловая скорость

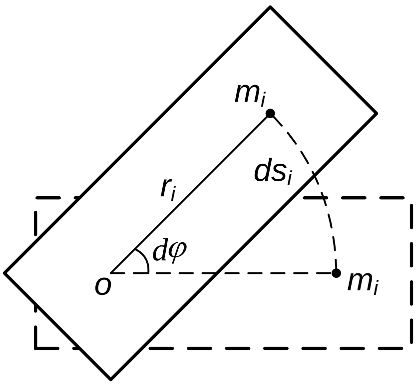


**Рис. 1**

Пусть твердое тело вращается вокруг оси О, перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 1). Проследим за движением элементарной частички тела с массой $m_i$, находящейся на расстоянии $r_i$ от оси вращения. За промежуток времени $dt$ тело повернется на угол $d\varphi$, а частица $m_i$ опишет дугу окружности $ds_i$. По известной теореме геометрии $ds_i=r_i{\cdot}d\varphi$.

Линейная скорость частицы равна:

$$V_i = \frac{ds_i}{dt} = r_i \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Производная угла поворота по времени называется угловой скоростью вращения тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.1)$$

Очевидно, что линейная и угловая скорости связана соотношением:

$$V_i = r_i \cdot \omega \qquad (1.2)$$

Отсюда ясно, что линейные скорости различных точек тела не одинаковы: $V_i$; тем больше, чем дальше точка расположена относительно оси вращения. Но угловая скорость, как и угол поворота, одинаковы для всех точек тела. Они характеризуют вращательное движение тела в целом. Поэтому именно они входят в формулировки законов вращательного движения.

Если скорость $V_i$ изменяется по величине, то элемент $m_i$ движется с тангенциальным ускорением:

$$a_i = \frac{dV_i}{dt} = r_i \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Производная угловой скорости по времени есть угловое ускорение:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \qquad (1.3)$$

Следовательно, линейное и угловое ускорение связаны соотношением:

$$a_i = r_i \cdot \beta \qquad (1.4)$$

**Момент инерции**

Вычислим кинетическую энергию вращающегося твердого тела. Разобьем все тело на элементарные массы. Тогда кинетическую энергию такой частицы можно выразить формулой для кинетической энергии материальной точки, движущейся со скоростью $V_i$:

$$E_к = \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = \frac{m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2}$$

Здесь $m_i$ - масса материальной точки.

Кинетическая энергия всего вращающегося тела равна сумме энергий всех его частиц. Следовательно:

$$E_к = \sum_i \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Введем обозначение:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \qquad (1.5)$$

Тогда получим:

$$E_к = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \qquad (1.6)$$

Таким образом, выражение для кинетической энергии вращающегося твердого тела имеет такой же вид, как и для движущейся материальной точки, но роль линейной скорости $V$ здесь играет угловая скорость $\omega$, а роль массы - величина $I$, называемая моментом инерции.

Моментом инерции материальной точки называется произведение ее массы на квадрат расстояния до оси вращения. Моментом инерции твердого тела называется сумма моментов инерции материальных точек, составляющих данное тело.

Для элемента $m_i$ (рис. 1) второй закон динамики имеет вид:

$$\vec{\mathbf{F}}_i = m_i \vec{\mathbf{a}}$$

Здесь $\vec{\mathbf{F}}_i$ - сила, действующая на $m_i$. Умножим векторно обе части уравнения на $\vec{\mathbf{r}}_i$. Заменив линейное ускорение угловым, найдем:

$$\vec{\mathbf{F}}_i \times \vec{\mathbf{r}}_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}$$

Написав аналогичные уравнения для всех элементов тела и сложив, получим:

$$\vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \times \vec{\mathbf{r}}_i$$

Сумма, стоящая слева есть момент инерции тела $I$. Векторное произведение силы на радиус-вектор, проведенный из центра вращения до точки приложения силы, называется моментом силы. Это векторная величина. Направление вектора определяется правилом правого винта (буравчика), модуль вектора определяется как $F_i \cdot r_i \cdot \sin\alpha$, где $\alpha$ -угол между $\vec{\mathbf{F}}_i$ и $\vec{\mathbf{r}}_i$. Таким образом, сумма, стоящая справа, является полным моментом сил, действующих на тело.

Используя введенные обозначения, можем написать последнее равенство в виде:

$$I \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\mathbf{M}} \qquad (1.7)$$

Написанное соотношение называется уравнением динамики вращательного движения твердого тела.

Момент инерции крестового маятника с закрепленными грузами $m_0$ равен

$$I = I_0 + 4 \cdot m_0 R^2, \qquad (1.7.1)$$

где $I_0$ - момент инерции крестовины; $m_0$ - масса груза, закрепленного на крестовине; R – расстояние от оси вращения до центра грузов $m_0$.

В данной работе производится экспериментальная проверка соотношения (1.7).

## Прибор и метод измерений

Прибор, применяемый в этой работе, называется крестовым маятником, или маятником Обербека. Основная часть маятника - крестовина, вращающаяся на горизонтальной оси; на ее стержнях могут перемещаться грузы. Общий вид прибора изображен на рисунке 2.

На вертикальном стержне (1), установленном на основании (2), прикреплены два кронштейна: нижний неподвижный (3) и верхний подвижный (4). Основание снабжено регулируемыми ножками (5), обеспечивающими горизонтальную установку прибора.

На верхней втулке закреплен диск (6). Через этот диск перекидывается нить (7). Один конец нити прикреплен к диску (8), а на втором конце закреплены грузы (9). На подвижном кронштейне прикреплен электромагнит (10), который, после подключения к нему напряжения питания, удерживает в состоянии покоя систему крестовины с грузами. Подвижный кронштейн (4) можно перемещать вдоль стержня (1) и фиксировать его в любом

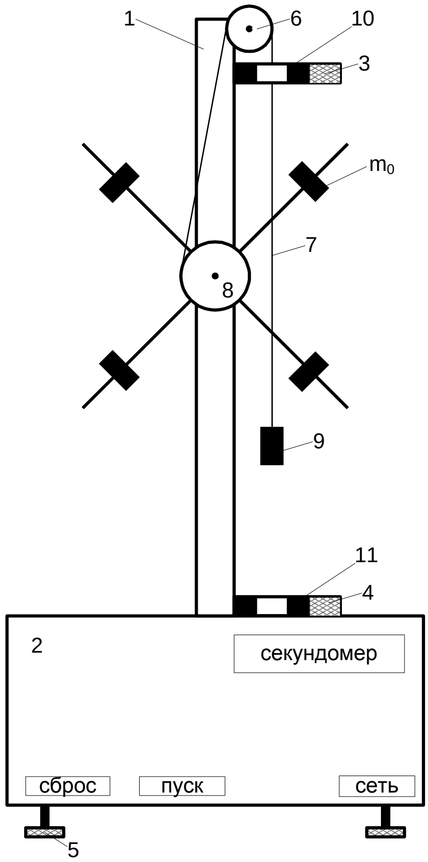


Рис.2

положении, задавая, таким образом, высоту падения грузов.

На подвижном кронштейне закреплен фотоэлектрический датчик №1, вырабатывающий импульс начала измерения времени падения грузов. На неподвижном кронштейне (3) укреплен фотоэлектрический датчик №2, вырабатывающий импульс конца измерения и включающий тормозной электромагнит (11).

На основании прибора имеется электронный секундомер, предназначенный для измерения времени падения грузов.

## ПОДГОТОВКА ПРИБОРА К ИЗМЕРЕНИЯМ

**Эксплуатация прибора разрешается лишь при заземленном корпусе**

Получить у преподавателя задание: число грузов, вызывающих движение системы, высоту падения грузов, два положения муфт на крестовине.

1. Проверить, не задевают ли грузы корпусы верхнего и нижнего фотоэлектрических датчиков. Если задевают, сообщить об этом лаборанту.
2. Сдвинуть подвижный кронштейн на выбранную высоту и установить так, чтобы грузы, падая, проходили через середину рабочего окна фотоэлектрических датчиков.
3. Включить сетевой шнур измерителя в сеть питания.
4. Нажать клавишу «сеть»; проверить, показывают ли все индикаторы измерителя нуль, и горят ли индикаторы обоих фотоэлектрических датчиков.
5. Переместить грузы в верхнее положение и проверить находится ли система в состоянии покоя. При этом груз должен быть на уровне верхнего края окна фотоэлектрического датчика.
6. Пробный пуск: нажать клавишу «пуск» и проверить, произошло ли движение системы; измерил ли секундомер время прохождения пути.

Нажать клавишу «сброс» и проверить, произошло ли обнуление показаний секундомера и освобождение блокировки грузов электромагнитом. Перевести грузы в верхнее положение, отжать клавишу «пуск» и проверить, произошла ли повторная блокировка маятника.

### Проведение измерений

В данной работе экспериментально исследуются две зависимости, которые следуют из основного закона динамики вращательного движения (1.7).

**А**. Зависимость углового ускорения $\beta$ от момента внешней силы $M$.

**Б**. Зависимость момента инерции $I$ от расстояния $R$.

Основной величиной, которая используется в настоящей работе, является время падения груза (9).

### Измерение времени падения груза

1. Установить число грузов, указанное преподавателем.
2. Установить нижний край грузов на уровне верхнего края окна фотоэлектрического датчика.
3. Отсчитать на шкале, расположенной на колонне, высоту падения.
4. Нажать клавишу «пуск», отсчитать время падения грузов.

### Зависимость углового ускорения $\beta$ от момента внешней силы $M$.

1. Установить число падающих грузов (9), указанное преподавателем.
2. Закрепить на стержнях крестовины массы $m_0$ на заданном преподавателем расстоянии $R$.
3. Не менее 5 раз произвести время падения грузов и определить среднее значение времени по формуле:

$$t_{cp} = \frac{\sum_i t_i}{n} \qquad (1.8)$$

где $n$ - число выполненных измерений, $t_i$ - время падения грузов при $i$-ом измерении. Далее во все расчетные формулы следует подставлять время $t$, вычисленное по формуле (1.8).

4.Изменить по указанию преподавателя число падающих грузов.

5.Повторно измерить время падения грузов (пункт 3).

6.Результаты измерений ввести в таблицу 1.

Таблица 1

| | масса падающего груза, кг $m_1$= | масса падающего груза, кг $m_2$= |
|---|---|---|
| Положение масс $m_0$, (м) | | |
| Высота падения $h$, (м) | | |
| Время падения, (с) | | |
| $t_1$ | | |
| $t_2$ | | |
| $t_3$ | | |
| $t_4$ | | |
| $t_5$ | | |
| $t$ среднее, (с) | | |
| Линейное ускорение $a$, (м)/с$^2$ | | |
| Угловое ускорение $\beta$ , (рад/с$^{2)}$ | | |
| Момент вращения $M$, (Н · м) | | |
| Момент инерции маятника, (кг · м$^{2)}$ | | |

Величина вращательного момента $M$ определяется по формуле:

$$M = F \cdot r = m \cdot (g - a) \cdot r\,, \qquad (1.9)$$

где $m$ - масса падающего груза, $g$ - ускорение свободного падения, $a$ - линейное ускорение груза, $r$ - радиус диска (6); **$r$=25** мм, **$g$=9.81** м/с$^2$.

Зная высоту падения грузов $h$, и время падения, линейное ускорение $a$, рассчитываем по формуле:

$$a = \frac{2h}{t^2}\,. \qquad (1.10)$$

Угловое ускорение $\beta$ равно:

$$\beta = \frac{2h}{t^2 \cdot r} \qquad (1.11)$$

Момент инерции маятника $I$ определяется по формуле $I = \dfrac{M}{\beta}$.

Все расчеты проводятся с точностью до трех значащих цифр. Например, если рассчитанная величина оказалась равной 0,002406, то результат расчета записывается как 0,00241 или как $2{,}41 \cdot 10^{-3}$.

По результатам расчета убеждаемся, что линейное ускорение $a \ll g$ и поэтому приближенно $M = F \cdot r \approx m \cdot g \cdot r$. Тогда из формулы (1.7) следует, что при постоянной величине момента инерции маятника $I$ должно выполняться отношение:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (1.12)$$

Проверяем справедливость отношения (1.12).

**Зависимость момента инерции *I* от расстояния *R*.**

1. Установить число падающих грузов (9), указанное преподавателем.
2. Закрепить на стержнях крестовины массы $m_0$ на заданном преподавателем расстоянии *R*.
3. Не менее 5 раз произвести время падения грузов и определить среднее значение времени по формуле:

$$t_{cp} = \frac{\sum_i t_i}{n} \qquad (1.8)$$

где $n$ - число выполненных измерений, $t_i$ - время падения грузов при $i$-ом измерении. Далее во все расчетные формулы следует подставлять время *t*, вычисленное по формуле (1.8).

4. Изменить по указанию преподавателя расстояние *R*.
5. Повторно измерить время падения грузов (пункт 3).
6. Результаты измерений ввести в таблицу 2.

Таблица 2

| | положение масс *R*, (м)<br>$R_1$= | положение масс *R*, (м)<br>$R_2$= |
|---|---|---|
| масса падающего груза, кг | | |
| Высота падения *h*, (м) | | |
| Время падения, (с) | | |
| $t_1$ | | |
| $t_2$ | | |
| $t_3$ | | |
| $t_4$ | | |
| $t_5$ | | |
| *t* среднее, (с) | | |
| Линейное ускорение *a*, (м)/с$^2$ | | |
| Угловое ускорение $\beta$ , (рад/с$^{2)}$ | | |
| Момент вращения *M*, (Н · м) | | |
| Момент инерции маятника, (кг · м$^{2)}$ | | |

Сравнивая рассчитанные значения моментов инерции маятника, с учетом формулы (1.8), делаем вывод о зависимости величины *I* от расстояния *R*.

**Вопросы:**

1. Что такое тангенциальное и нормальное ускорение? Полное ускорение? Укажите направление векторов скорости, тангенциального и нормального, а также полного ускорений в некоторой точке криволинейной траектории движения (траекторию выбрать произвольно).
2. Что такое угловая скорость? Какова связь между линейной и угловой скоростями?
3. Что называется угловым ускорением? Как связаны линейное и угловое ускорение?
4. Что такое момент силы? Могут ли разные по величине силы вызвать одинаковое угловое ускорение вращения тела?
5. Что такое момент инерции материальной точки?
6. Какая величина называется моментом инерции тела, и какую роль она играет во вращательном движении?
7. Напишите основное уравнение механики вращательного движения.