

Лабораторная работа

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы: на основании закона сохранения энергии определить момент инерции тела

Введение

Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух основных видов движения - поступательного и вращательного.

При поступательном движении твердого тела все точки тела за один и тот же промежуток времени получают одинаковые по величине и направлению перемещения. Любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе при поступательном движении тела.

При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси вращения (жестко связанной с телом) все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой — неподвижной оси вращения. Поступательное движение твердого тела и вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси вращения — простейшие виды движения тел.

Можно выделить еще один относительно простой вид движения твердого тела — плоское движение.

При плоском движении твердого тела все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Наглядный пример плоского движения тела - качение цилиндра по плоскости.

Произвольное движение твердого тела описывается двумя уравнениями:

$$m\ddot{\mathbf{w}}_c = \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{M}}_c = \mathbf{N}_c, \quad (2)$$

где m , \mathbf{w}_c , \mathbf{M}_c — масса, ускорение центра масс, момент импульса твердого тела относительно центра масс соответственно; \mathbf{F} — сумма всех сил, действующих на тело; \mathbf{N}_c — сумма моментов этих сил относительно центра масс. Уравнение (1) описывает поступательное движение центра масс тела. Уравнение (2) описывает вращение тела относительно центра масс.

Если тело совершает плоское движение, уравнение (2) приводится к виду

$$I\beta_z = N_z, \quad (3)$$

где β_z - проекция углового ускорения тела на ось вращения Z ; N_z - проекция суммарного момента сил, действующих на тело, на ту же ось; I - момент инерции тела относительно оси вращения Z .

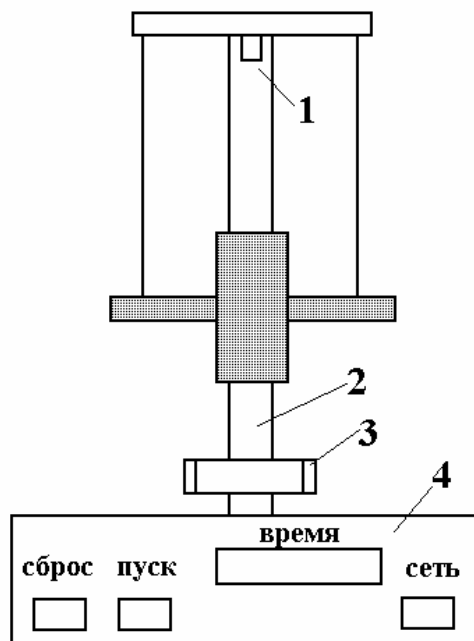
В настоящей работе изучается плоское движение тел, используя простейшие тела симметричной формы. При этом оси симметрии тел будут совпадать с осями вращения и проходить через центр масс. Таким образом, движение твердых тел описывается уравнениями (1) и (3). Кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью, равной скорости движения центра масс тела v_c и энергии вращения тела с угловой скоростью ω относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (4)$$

Описание установки «Маятник Максвелла»

Плоское движение тела в настоящей работе изучается на установке, называемой «Маятник Максвелла», схематически изображенной на рисунке.

На вертикальной колонне 2, закрепленной на основании 4, установлены два кронштейна: неподвижный верхний 1 и подвижный нижний 3. На верхнем кронштейне расположен электромагнит, удерживающий маятник в верхнем положении, устройство для крепления нити бифилярного подвеса маятника.



Нижний кронштейн с прикрепленным к нему фотодатчиком может перемещаться вдоль колонны и фиксироваться в произвольном положении, определяемом по миллиметровой шкале на колонне прибора. Для определения положения кронштейн снабжен красным указателем, совпадающим с оптической осью фотодатчика, прикрепленного к кронштейну. Фотодатчик соединен с миллисекундомером, расположенным в основании установки. Маятник установки - это ролик, жестко закрепленный на оси. Ось с помощью двух нитей подвешена к верхнему кронштейну (бифилярный способ подвески). Ось маятника имеет форму тонкостенного цилиндра; ролик — форму сплошного кругового цилиндра. На ролик одето кольцо.

Маятник поворачивают вокруг оси симметрии, наматывая равномерно на его ось нити бифилярного подвеса. С помощью электромагнита маятник фиксируется в крайнем верхнем положении. После отключения электромагнита маятник начинает опускаться, скручиваясь с нитью подвеса.

Миллисекундомер начинает отсчет времени движения маятника. Когда маятник опустится на максимальную длину, нижний край его съемного кольца пересечет оптическую ось фотодатчика, прикрепленного к нижнему кронштейну. Миллисекундомер автоматически прекратит отсчет времени, и на его табло будет показано время t опускания маятника на максимальную длину маятника h . Эта длина определяется указателем положения нижнего кронштейна по миллиметровой шкале на колонне (верхнее положение маятника соответствует нулевой отметке шкалы). Тогда ускорение, с которым опускалась ось маятника (или, что то же, ускорение его центра масс), определяется по формуле

$$w_c = \frac{2h}{t^2}. \quad (5)$$

Уравнения (1) и (3), описывающие плоское движение твердого тела, в применении к маятнику Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned} mw_c &= mg - 2F, \\ I\beta &= 2FR, \end{aligned} \quad (6)$$

где m - суммарная масса оси ролика и кольца; w_c - ускорение центра масс маятника; g - ускорение свободного падения; I - суммарный момент инерции оси, ролика и кольца относительно оси симметрии маятника; F - сила натяжения каждой из нитей бифилярного подвеса; R - радиус оси маятника; β - величина углового ускорения тела.

Уравнение (6) должно быть дополнено уравнением, связывающим угловое ускорение β маятника относительно оси симметрии с ускорением центра масс:

$$w_c = \beta R \quad (7)$$

Решая систему уравнений (6) и (7), находим неизвестные величины I , β и F как функции ускорения w_c , которое может быть экспериментально определено на установке согласно формуле (5). В результате суммарный момент инерции I , который мы обозначим как I_{Σ} может быть найден из соотношения

$$I_{\Sigma} = \frac{md_0^2}{4} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (8)$$

где d_0 - диаметр оси маятника; $m = m_0 + m_p + m_k$ - суммарная масса маятника, представляющая собой сумму массы его оси m_0 , массы ролика m_p и массы кольца m_k .

Теоретическое значение момента инерции маятника определяется по формуле

$$I_T = I_0 + I_p + I_k, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{4} m_0 d_o^2, \\ I_p &= \frac{1}{8} m_p d_p^2, \\ I_k &= \frac{1}{8} m_k (d_k^2 + d_p^2) \end{aligned} \quad (10)$$

- моменты инерции оси, ролика и кольца соответственно; d_0 - диаметр оси; d_p - диаметр ролика и внутренний диаметр кольца; d_k - внешний диаметр кольца.

Задание

Экспериментальное определение момента инерции тела

1. Записать в журнал значения масс и диаметров оси, ролика и кольца, надетого на ролик.
2. По миллиметровой шкале определить положение нижнего кронштейна.
3. Включить прибор нажатием клавиши СЕТЬ (клавиша ПУСК при этом отжата, и на магнит подано напряжение).

4. Равномерно намотав нити на ось маятника, закрепить его с помощью магнита в крайнем верхнем положении.
5. Нажать клавишу ПУСК. С электромагнита автоматически будет снято напряжение, и маятник, скручиваясь с нити, начнет опускаться вниз. Миллисекундомер начнет отсчитывать время спуска. После пересечения нижним краем кольца оптической оси фотодатчика, расположенного на нижнем кронштейне, миллисекундомер автоматически прекратит отсчет времени.
6. Записать в заранее заготовленную таблицу время движения маятника.
7. Повторить измерение времени движения t маятника еще несколько раз. Для этого необходимо выполнить следующие действия:
 - Отжать клавишу ПУСК;
 - Закрепить маятник в крайнем верхнем положении, как это описано в п. 3;
 - Нажать клавишу СБРОС: на табло секундомера будут высвечены нули – прибор готов для повторных измерений.

По формуле (8) определить экспериментальное значение момента инерции маятника Максвелла. По формулам (9) определить теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла. Сделать заключение о совпадении экспериментального и теоретического результатов.

h	m	t	$\langle t \rangle$	I

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основные уравнения динамики произвольного движения.
2. Какое движение называется плоским?
3. Сформулировать основные уравнения плоского движения тел.
4. Дать определение момента инерции тела относительно произвольной оси.
5. Вывести формулу (10) для момента инерции кольца.
6. Сформулировать закон сохранения полной механической энергии для тела, системы тел.

7. Сплошной металлический шар и металлическая оболочка одинакового радиуса и массы скатываются без проскальзывания с одной и той же горки. Чья поступательная скорость на горизонтали будет выше? Те же объекты, разогнанные с одинаковой скоростью, вкатываются на горку. Какой из них поднимется выше?
8. Какую работу нужно совершить, чтобы вертикально забросить камень массой m на высоту h , если средняя сила сопротивления воздуха постоянна и равна F ?
9. Тело, брошенное вертикально вверх, достигает верхней точки и затем падает вниз. Нарисовать график изменения его кинетической энергии со временем.
10. Один грузик подвешен на нерастяжимой нити, а другой – на жестком невесомом стержне такой же длины. Одинаковые ли минимальные скорости нужно сообщить грузикам в нижнем положении, чтобы они совершили полный оборот в вертикальной плоскости?
11. Первоначально покоившееся на горке тело массой m после легкого толчка медленно сползает с высоты h на горизонтальную поверхность. Какую работу необходимо совершить сторонней силе, чтобы так же медленно втащить тело на горку на прежнее место?
12. Одинаковую ли скорость получит центр шара у основания наклонной плоскости, если один раз он соскальзывает (без трения), а другой раз скатывается с нее? Сопротивление воздуха не учитывать.
13. Найти кинетическую энергию однородного диска массой m и радиусом R , катящегося по земле без проскальзывания со скоростью v_0 .

Приложение

Одним из центральных понятий в динамике твердого тела является понятие момента инерции тела относительно некоторой оси. Момент инерции тела относительно некоторой оси зависит от массы тела и от распределения этой массы относительно оси. В простейшем случае материальной точки массы момент инерции относительно оси равен произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до этой оси:

$$I_z = mr^2.$$

Момент инерции тела – величина аддитивная: момент инерции протяженного тела равен сумме моментов инерции его частей; момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции отдельных тел системы. Момент инерции тела относительно произвольной оси Z определяется как сумма моментов инерции элементарных масс Δm_i , на которые можно разбить тело:

$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2,$$

где r_i - расстояние от оси Z до i -й массы.

Совершив предельный переход $\Delta m_i \rightarrow 0$, получим

$$I_z = \int_V \rho(\mathbf{r}) r^2 dV,$$

где $\rho(\mathbf{r})$ - плотность тела, которая может изменяться в пределах тела, V - объем тела. Одно и то же тело обладает различными моментами инерции относительно разных осей. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции $I_{z'}$ относительно оси Z' равен сумме момента инерции I_z относительно оси Z , параллельной данной оси Z' и проходящей через центр массы тела C , и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями

$$I_{z'} = I_z + ma^2.$$

