Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Государственный университет по землеустройству»
Факультет Землеустройства
Кафедра Высшей математики и физики

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине **«Математика»**

(наименование дисциплины)

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
«___»____________2011г.
Протокол №__ ___

Заведующий кафедрой __________________Соловьёв И.А.
(подпись, дата)

Факультет Архитектуры

Направление подготовки (специальность) 270100.62 Архитектура

Профиль (специализация) подготовки Архитектурное проектирование

Кафедра Высшей математики и физики

Москва 2011

ПАСПОРТ

фонда оценочных средств

по дисциплине Математика

(наименование дисциплины)

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или её части)	Наименование оценочного средства
1	2	3
1 Линейная алгебра и аналитическая геометрия.	ОК-10	Оценка контрольной работы, самостоятельной работы, ответов на вопросы, экзамен
2 Элементы дискретной математики и математической логики.	ОК-11	Тестирование, Беседа, дискуссия
3 Введение в математический анализ.	ОК-10	Тестирование, контрольная работа, РГР
4 Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного.	ОК-10	Тестирование, оценка контрольной работы, самостоятельной работы, ответов на вопросы, экзамен
5 Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы	ОК-10	Тестирование, Защита РГР, контрольная работа
6 Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных.	ОК-10	Тестирование, Защита РГР, контрольная работа
7 Обыкновенные дифференциальные уравнения.	ОК-10	Тестирование, Защита РГР, контрольная работа, экзамен
Итоговый контроль	ОК-10, ОК-11	Тестирование Экзамен

Наименование темы (раздела) в соответствии с рабочей программой дисциплины

Составитель _______________**доц. А.В. Червяков**

(подпись, дата)

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет по землеустройству»

Кафедра Высшей математики и физики
(наименование кафедры)

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Составитель __________________________ А.В. Червяков
(подпись)

«____»___________________20 г.

Москва 2011

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОВЕРЯЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ:

Формулировка ОК-10 - использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования..
Формулировка ОК-11 - понимает сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознает опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдает основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны.

Примерные вопросы к экзамену

1 семестр

1. Матрицы. Определители и их свойства. Способы вычисления определителей.
2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.
3. Метод Гаусса.
4. Линейно зависимые и линейно независимые системы столбцов. Ранг матрицы и способы его вычисления.
5. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных алгебраических уравнений.
6. Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы. Матричный способ решения систем с квадратной матрицей.
7. Общее решение однородной системы общего вида. Базисные и свободные переменные. Общее решение неоднородной системы общего вида.
8. Векторы. Алгебраические операции с векторами. Линейная зависимость и независимость векторов.
9. Скалярное произведение векторов и его свойства.
10. Векторное произведение векторов и его свойства.
11. Смешанное произведение векторов и его свойства.
12. Прямая линия на плоскости и ее уравнения.
13. Прямая линия в пространстве и ее уравнения. Расстояние от точки до прямой.
14. Уравнения плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
15. Эллипс и его свойства.
16. Гипербола и ее свойства.
17. Парабола и ее свойства.
18. Предел функции и его геометрический смысл. Односторонние пределы. Свойства пределов функции.
19. Бесконечно малые функции. Символика. Сравнение бесконечно малых. Таблица основных эквивалентных бесконечно малых.
20. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.
21. Первый и второй замечательный пределы.
22. Непрерывность в точке. Классификация разрывов с примерами.
23. Непрерывность элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, достижимость наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.
24. Асимптоты к графикам функций и способы их нахождения.

25. Производная функции в точке. Геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Связь между непрерывностью функции и существованием у нее производной.
26. Дифференцируемость функции. Геометрический смысл. Связь между дифференцируемостью, непрерывностью и существованием производной. Первый дифференциал и его геометрический смысл.
27. Производная и дифференциал от суммы, разности, произведения и частного двух функций. Производные основных функций.
28. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производная функции, заданной параметрически.
29. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
30. Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
31. Правило Лопиталя. Примеры.
32. Критерий монотонности дифференцируемой функции. Определение точек экстремума по первой и второй производным. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
33. Определения выпуклости и вогнутости графика функции. Определение точки перегиба. Применение второй производной к нахождению интервалов выпуклости и вогнутости.
34. Общая схема исследования функций и построения графиков

36.Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования.
37.Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.
38. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.
39. Определение и основные свойства определенного интеграла. Производная по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям.
40.Применение определённых интегралов в геометрии и физике. Вычисление площадей плоских областей, длин дуг плоских кривых, поверхностей фигур вращения и объёмов тел вращения. Вычисление центров тяжести и моментов инерции плоских пластин.
41.Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.
42. Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.
43. Градиент. Производная по направлению. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
44.Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия. Условный экстремум.

45.Дифференциальное уравнение первого порядка. Частное и общее решения. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
46.Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
47.Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
48.Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Образец экзаменационного билета

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ
20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Сравнение бесконечно малых функций. Символика. Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблица основных эквивалентных бесконечно малых функций.
2. Найти экстремум функции $f(x)=xe^{x}$.
3. Пользуясь геометрическим смыслом смешанного произведения векторов, найти объем тетраэдра, заданного своими вершинами $P_0(-1;4;1)$, $P_1(2;-1;-2)$, $P_3(1;1;3)$, $P_4(5;0;4)$.

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.
Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ
20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Прямая линия на плоскости и ее уравнения. Уравнения плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве.
2. Найти производные до третьего второго порядка включительно для функции $f(x)=\ln(1+x^2)$.
3. Найти матрицу, обратную к данной $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.
Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ
20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Линейная зависимость и независимость векторов.
2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $f(x)=4x^2+5x-6$ в точке $x=1$.
3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$.

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.
Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.
2. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. Пользуясь формулой Тейлора, разложить по степеням $(x+1)$ функцию $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$.

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.

Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Векторное произведение векторов и его свойства.
2. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_2(1+15x)}{\arcsin(3x)}$
3. Определить точки перегиба графика функции $f(x) = e^{-x^2}$

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.

Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Смешанное произведение векторов.
2. Найти первый и второй дифференциалы функции $f(x)=\ln(1+x)-3\sqrt{x}$.
3. Решить методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-4x_2+5x_3=7 \\ 2x_1+3x_2+6x_3=17 \\ 3x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$$

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.

Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

20 /20 учебный год факультет архитектуры первый курс, первый семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Условия коллинеарности, ортогональности и компланарности в координатной форме.
2. Методом Гаусса решить систему уравнений $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ 3x_1+5x_2+x_3=16 \end{cases}$
3. Найти производную функции $f(x)=x^x$.

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.

Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

20 /20 учебный год факультет городского кадастра первый курс, первый семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Формулировка теорем, Ролля, Лагранжа, Коши.
2. Найти общее решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=3 \\ x_1-x_2+5x_3=2 \end{cases}.$$

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(-1;2)$ перпендикулярно вектору $n(3;-4)$.

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.
Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

20 /20 учебный год факультет городского кадастра первый курс, первый семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Формулировка правила Лопиталя. Примеры.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $P_0(-1;2;0)$, $P_1(4;3;6)$, $P_3(5;-1;2)$.
3. Найти общее решение $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+4_2+6x_3=12 \end{cases}$

Лектор потока: профессор Соловьев И.А.
Заведующий кафедрой профессор Соловьев И.А..

Критерии оценки знаний

Экзаменационные билеты включают в себя теоретический вопрос и две задачи.

Оценка определяется следующими четырьмя составляющими:

1) результатами ответа на 1-й вопрос;
2) решением первой задачи;
3) решением второй задачи;
4) результатами ответов на дополнительные вопросы.

При этом учитывается текущая успеваемость, посещаемость занятий, выполнение заданий на самостоятельную работу, выполнение заданий на контрольную работу.

Результаты экзамена оцениваются:

«отлично» - при наличии у студента глубоких, исчерпывающих знаний, грамотном и логически стройном построении ответа по следующим направлениям дисциплины:

- освоение теоретических положений по математическим методам и моделям;
- глубокое знание методологических положений и алгоритмов решения задач по разделам дисциплины;
- применение полученных знаний для решения практических задач,
- **«хорошо»** - при наличии твердых и достаточно полных знаний, логически стройном построении ответа при незначительных ошибках по направлениям, перечисленным при оценке «отлично».

«удовлетворительно» - при наличии твердых знаний, изложении ответа с ошибками, уверенно исправленными после наводящих вопросов по изложенным выше вопросам.

«неудовлетворительно» - при наличии грубых ошибок в ответе, непонимании сущности излагаемого вопроса, неуверенности и неточности ответов после наводящих вопросов по вопросам изучаемой дисциплины:

Оценка выставляется в экзаменационной ведомости.

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет по землеустройству»

Кафедра <u>Высшей математики и физики</u>
(наименование кафедры)

Оценочное средство – контрольная работа

Составитель ____________________________ А.В. Червяков
(подпись)

«____»_________________20   г.

Москва 2011

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОВЕРЯЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ:

Формулировка ОК-10 - использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования..
Формулировка ОК-11 - понимает сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознает опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдает основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны.

Контрольная работа проводится после изучения каждого раздела дисциплины. Контрольная работа является индивидуальной для каждого студента, состоит из решения практической задачи. Контрольная работа проводится на практическом занятии.

Оценка КР выставляется в журнал учебных занятий и учитывается при аттестации студентов в период зачётной экзаменационной сессии (сокращение числа экзаменационных вопросов при оценке КР не ниже «хорошо», предоставление права студенту выбора экзаменационных вопросов из предложенных преподавателем.

Примеры типовых контрольных заданий и образцы их решений

Задача №1

Даны две матрицы A и B. Найти неизвестную матрицу X, удовлетворяющую данному матричному уравнению (таблица 1).

Таблица 1

Номер варианта	**Уравнение**	**Матрица A**	**Матрица B**
1	2X–3A=(X+3B)A	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2	2X+AB=AX–B	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
3	ABX–4X=2A	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	2BX=A(X+5B)	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
5	2X+A=B(X–2A)	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$
6	ABX–A=B+BAX	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
7	XA+6X=40B	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
8	$X-\frac{1}{2}XB=A$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
9	$XA=\frac{1}{2}B+X$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 8 & 20 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\frac{1}{3}AX+3X=B$	$\begin{pmatrix} -12 & 15 & 12 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11	(X+A)B=2X	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
12	(X–B)A=2A+X	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
13	XAB=$\frac{1}{2}$A–3X	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
14	8B–X=BAX	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
15	$\frac{1}{3}$AX=B+X	$\begin{pmatrix} -3 & 8 & -3 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
16	AX=B–$\frac{1}{3}$X	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 2 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
17	ABX=5A–X	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
18	BX–2A=$\frac{5}{2}$X	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

19	4X–15A=ABX	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
20	X–12B=$\frac{1}{2}$XA	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
21	A(X–6B)=$\frac{1}{4}$X	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -3 & 4 \\ 6 & \frac{1}{4} & 2 \\ 10 & 3 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 16 & 0 & -12 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$
22	3X+B=XA	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$
23	AX+2A=2BX	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
24	$\frac{1}{2}$XB=A+3X	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
25	AX–B=3X	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
26	2X–A=BX	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
27	XB–B=5X–XA	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

28	AX=B+3X	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
29	AX–B=2A+X	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 17 \end{pmatrix}$
30	AX=B	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Образец решения задачи №1

Решим следующее матричное уравнение:

$$3X + A = B\,(X+4A), \text{ где}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, раскроем скобки в правой части уравнения, не меняя при этом порядка сомножителей.

$$3X+A=BX + 4BA$$

Пусть $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица, тогда уравнение можно записать следующем виде: $A-4BA=(B-3E)X$.

Определим матрицу $B-3E$:

$$B-3E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы $B-3E$:

$$|B-3E| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-3)\cdot(-5)+2\cdot1\cdot4-4\cdot(-3)\cdot3-2\cdot2\cdot(-5)-$$

$-3\cdot1\cdot(-4)=-60+8+18+36+20+12=34$.

Так как определитель матрицы B–3E отличен от нуля, эта матрица имеет обратную. Найдём матрицу $(B\text{-}3E)^{-1}$. Для этого, прежде всего союзную матрицу:

$$(B-3E)^{*} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 11 \\ 14 & 8 & 10 \\ 18 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом обратная матрица будет равна:

$$(B\text{-}3E)^{-1} = -\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 19 & 11 \\ 14 & 8 & 10 \\ 18 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь определим матрицу A–4AB:

$$E-4B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 & 12 \\ 8 & 0 & 4 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -12 \\ -8 & 1 & -4 \\ -16 & -12 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A-4AB = (E-4B)A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -12 \\ -8 & 1 & -4 \\ -16 & -12 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ -16 \\ -85 \end{pmatrix}.$$

В итоге получено простейшее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -63 \\ -16 \\ -85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} X$$

Искомая матрица X равна:

$$X = \frac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 19 & 11 \\ 14 & 8 & 10 \\ 18 & 20 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -63 \\ -16 \\ -85 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 1467 \\ 1380 \\ 2134 \end{pmatrix}.$$

Задача № 2

Решить систему линейных алгебраических уравнений (таблица 2) методом Гаусса.

Таблица № 2

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=6 \\ 3x_1+5x_2+7x_3=-3 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-2x_3=-3 \\ -x_1+x_2-5x_3=2 \\ 3x_1-x_2+4x_3=1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=4 \\ x_1-x_2+3x_3+3x_4=3 \\ 5x_1+2x_2-x_4=1 \\ x_1+3x_2-5x_3=7 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=-3 \\ 3x_1-2x_2+x_4=4 \\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4=1 \\ 5x_1-3x_2+x_3-4x_4=5 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+9x_3+8x_4=-3 \\ 6x_1+9x_2+9x_3+4x_4=8 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 5x_1+2x_3+x_4=11 \\ -x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-8 \\ 2x_1-4x_2+x_4=14 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=13 \\ 5x_1+2x_2-x_3=10 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=6 \\ x_1-x_2+2x_3=7 \\ -4x_1+x_2-3x_3=-17 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5 \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=4 \\ -3x_1-6x_2-9x_3+3x_4=-1 \\ 4x_1+x_2-x_4=-2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+x_2=4 \\ -x_1+5x_2+3x_3=0 \\ 7x_1+3x_2+x_3=5 \\ 2x_1+7x_2+6x_3=-2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+5x_4=-1 \\ 2x_1+6x_2+5x_3+6x_4=1 \\ 3x_1+7x_2+4x_3+8x_4=2 \\ 3x_1+5x_2+x_3+9x_4=1 \end{cases}$

13	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 \qquad - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 9 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -8 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = -9 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \qquad - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 \qquad = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + \quad 3x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \qquad 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 \qquad = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$

29	$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4 \qquad =0 \\ 2x_1-3x_2+x_3+ \qquad 4x_5=1 \\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4 \qquad =0 \\ 3x_1+7x_2-2x_3+ \qquad x_5=1 \\ 2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3 \\ x_1+x_2+ \qquad x_4 \qquad =6 \end{cases}$

Образец решения задачи №2

Методом Гаусса найдём общее решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=2 \\ 3x_1-x_2-2x_3=-3 \end{cases}.$$

Прежде всего, составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Согласно алгоритму Гаусса будем приводить эту матрицу к треугольному виду (все проводимые преобразования указаны между матрицами).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{(4)-3\cdot(1)}{\overset{(2)-(1),\ (3)-2\cdot(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1/2\cdot(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{(4)+4\cdot(2)}{\overset{(3)+5\cdot(2),}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{1/6\cdot(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(4)-(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

где (*) – номер строки.

Однако уравнение, отвечающее последней строке полученной матрицы, является противоречивым. Следовательно, рассматриваемая система несовместна, т.е. не имеет решений.

Задача № 3

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (таблица 3). Найти длину вектора $\overline{a}$.

Таблица№ 3

№ варианта	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	$(\widehat{\overline{p},\overline{q}})$
1	$\overline{p}+2\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	1	2	$\pi/6$
2	$3\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\pi/4$
3	$\overline{p}-3\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	1/5	1	$\pi/2$
4	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	4	1/2	$5\pi/6$
5	$\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}+\overline{q}$	2	3	$3\pi/4$
6	$\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\pi/3$
7	$2\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	3	2	$\pi/2$
8	$4\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\pi/4$
9	$\overline{p}-4\overline{q}$	$3\overline{p}+\overline{q}$	1	2	$\pi/6$
10	$\overline{p}+4\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	7	3	$\pi/3$
11	$3\overline{p}+2\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	10	1	$\pi/2$
12	$4\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	5	4	$\pi/4$
13	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	6	7	$\pi/3$
14	$3\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	3	4	$\pi/3$
15	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\pi/4$
16	$2\overline{p}-3\overline{q}$	$3\overline{p}+\overline{q}$	4	1	$\pi/6$
17	$5\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	1	2	$\pi/3$
18	$7\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	1/2	2	$\pi/2$
19	$6\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	3	4	$\pi/4$
20	$10\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\pi/6$

21	$6\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	8	1/2	$\pi/3$
22	$3\overline{p}+4\overline{q}$	$\overline{q}-\overline{p}$	5/2	2	$\pi/2$
23	$7\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	3	1	$3\pi/4$
24	$\overline{p}+3\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	3	5	$2\pi/3$
25	$3\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	7	2	$\pi/4$
26	$5\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	5	3	$5\pi/6$
27	$3\overline{p}-4\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	2	3	$\pi/4$
28	$6\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	1/2	4	$5\pi/6$
29	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	1	$\pi/3$
30	$2\overline{p}-3\overline{q}$	$5\overline{p}+\overline{q}$	2	3	$\pi/2$

Образец решения задачи № 3

Пусть $\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, значения модулей $|\overline{p}|=4$, $|\overline{q}|=3$, а угол между векторами $(\overline{p},\hat{\ }\overline{q})=3\pi/4$.

Определим площадь параллелограмма построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$S=|\overline{a}\times\overline{b}|=|(3\overline{p}+2\overline{q})\times(2\overline{p}-\overline{q})|=|6\overline{p}\times\overline{p}+4\overline{q}\times\overline{p}-3\overline{p}\times\overline{q}-2\overline{q}\times\overline{q}|=$$

$$=|7\overline{q}\times\overline{p}|=7\cdot|\overline{q}|\cdot|\overline{p}|\cdot\sin(\overline{p}\hat{,}\overline{q})=7\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=42\sqrt{2}.$$

Найдём длину вектора $\overline{a}$:

$$|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}=\sqrt{(3\overline{p}+2\overline{q})^2}=\sqrt{9\overline{p}^2+12\overline{p}\cdot\overline{q}+4\overline{q}^2}=$$

$$=\sqrt{9|\overline{p}|^2+12|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|\cdot\cos(\overline{p}\hat{,}\overline{q})+4|\overline{q}|^2}=\sqrt{144-144\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+36}=\sqrt{180-72\sqrt{2}}.$$

Задача № 4

Даны координаты вершин пирамиды **ABCD** (таблица 4). Найти объём пирамиды, площадь грани **ABC** и угол между ребрами **AB** и **AO**.

Таблица № 4

№ варианта	A	B	C	D
1	(1,3,6)	(2,2,1)	(-1,0,1)	(-4,6,-3)
2	(-4,2,6)	(2,-3,0)	(-10,5,8)	(-5,2,-4)
3	(7,2,4)	(7,-1,-2)	(3,3,1)	(-4,2,1)
4	(2,1,4)	(-1,5,-2)	(-7,-3,2)	(-6,-3,6)
5	(-1,-5,2)	(-6,0,-3)	(3,6,-3)	(-10,6,7)
6	(0,-1,-1)	(-2,3,5)	(1,-5,-9)	(-1,-6,3)

7	(5,2,0)	(2,5,0)	(1,2,4)	(-1,1,1)
8	(2,-1,-2)	(1,2,1)	(5,0,-6)	(-10,9,-7)
9	(-2,0,-4)	(-1,7,1)	(4,-8,-4)	(1,-4,6)
10	(14,4,5)	(-5,-3,2)	(-2,-6,-3)	(-2,2,-1)
11	(1,2,0)	(3,0,-3)	(5,2,6)	(8,4,-9)
12	(2,-1,2)	(1,2,-1)	(3,2,1)	(-4,2,5)
13	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)	(-1,0,-2)
14	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)	(7,5,-3)
15	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)	(5,9,-8)
16	(1,5,-7)	(-3,6,3)	(-2,7,3)	(-4,8,-12)
17	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-5,-2,0)	(2,5,4)
18	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)	(3,5,4)
19	(4,-1,3)	(-2,1,0)	(0,-5,1)	(3,2,-6)
20	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)	(2,-2,-4)
21	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)	(4,4,-2)
22	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)	(-3,0,1)
23	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)	(2,1,0)
24	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)	(1,-1,2)
25	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)	(7,-3,1)
26	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)	(3,1,-4)
27	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)	(-4,3,5)
28	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(3,1,-4)	(-4,7,3)
29	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)	(-5,2,-8)
30	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)	(-10,-8,7)

Образец решения задачи № 4

Пусть координаты вершин **A, B, C** и **D** равны:

A(1,-1,2); B(2,1,2); C(1,1,4); D(6,-3,8).

Введём в рассмотрение следующие векторы

$$\overline{AB}(1{,}2{,}0),\ \overline{AC}(0{,}2{,}2),\ \overline{AD}(5{,}-2{,}6).$$

Объём пирамиды вычисляем по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix} = \frac{1}{6}(12+20+0-0-0+4) = 6.$$

Далее определим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\bar{k} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Тогда площадь грани **ABC** определяем по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+4+4} = \sqrt{6}.$$

Найдём угол между рёбрами **AB** и **AD**

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|} = \frac{5-4+0}{\sqrt{1+4+0}\cdot\sqrt{25+4+36}} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}} = \frac{1}{5\sqrt{13}},$$

то есть $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$.

Задача № 5

Заданы векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и $\overline{p}$ своими координатами в некотором базисе (таблица 5). Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{p}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Таблица № 5

№ варианта	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{p}$
1	(0,1,2)	(1,0,1)	(-1,2,4)	(-2,4,7)
2	(1,3,0)	(2,-1,1)	(0,-1,2)	(6,12,-1)
3	(2,1,-1)	(0,3,2)	(1,-1,1)	(1,-4,4)
4	(4,1,1)	(2,0,-3)	(-1,2,1)	(-9,5,5)
5	(-2,0,1)	(1,3,-1)	(0,4,1)	(-5,-5,5)
6	(5,1,0)	(2,-1,3)	(1,0,-1)	(13,2,7)
7	(0,1,1)	(-2,0,1)	(3,1,0)	(-19,-1,7)
8	(1,0,2)	(0,1,1)	(2,-1,4)	(3,-3,4)
9	(3,1,0)	(-1,2,1)	(-1,0,2)	(3,3,-1)
10	(-1,2,1)	(2,0,3)	(1,1,-1)	(-1,7,-4)
11	(1,1,4)	(0,-3,2)	(2,1,-1)	(6,5,-14)
12	(1,-2,0)	(-1,1,3)	(1,0,4)	(6,-1,7)
13	(1,0,5)	(-1,3,2)	(0,-1,1)	(5,15,0)
14	(1,1,0)	(0,1,-2)	(1,0,3)	(2,-1,11)
15	(1,0,2)	(-1,0,1)	(2,5,-3)	(11,5,-3)
16	(2,0,1)	(1,1,0)	(4,1,2)	(8,0,5)
17	(0,1,3)	(1,2,-1)	(2,0,-1)	(3,1,8)
18	(1,2,-1)	(3,0,2)	(-1,1,1)	(8,1,12)
19	(1,4,1)	(-3,2,0)	(1,-1,2)	(-9,-8,-3)
20	(0,1,-2)	(3,-1,1)	(4,1,0)	(-5,9,-13)
21	(0,5,1)	(3,2,-1)	(-1,1,0)	(-15,5,6)
22	(1,0,1)	(0,-2,1)	(1,3,0)	(8,9,4)
23	(2,1,0)	(1,-1,0)	(-3,2,5)	(23,-14,-30)
24	(2,1,0)	(1,0,1)	(4,2,1)	(3,1,3)
25	(0,3,1)	(1,-1,2)	(2,-1,0)	(-1,7,0)
26	(1,-1,2)	(3,2,0)	(-1,1,1)	(11,-1,4)
27	(1,1,4)	(-3,0,2)	(1,2,-1)	(-13,2,18)
28	(0,-2,1)	(3,1,-1)	(4,0,1)	(0,-8,9)
29	(0,1,5)	(3,-1,2)	(-1,0,1)	(8,-7,-13)
30	(1,0,1)	(1,-2,0)	(0,3,1)	(2,7,5)

Образец решения задачи № 5

Пусть векторы имеют следующие координаты $\overline{a}(1,1,1)$, $\overline{b}(2,2,1)$, $\overline{c}(1,2,3)$, $\overline{p}(-1,4,7)$.

Покажем, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис. Как известно, в пространстве любые три некомпланарных вектора образуют базис. Для того чтобы векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ были некомпланарными достаточно, чтобы их смешанное произведение не равнялось нулю.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Найдём координаты вектора $\overline{p}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Представим вектор $\overline{p}$ в виде:

$$\overline{p} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}.$$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 4. \\ x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix} = -10, \quad y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Задача № 6

Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость, проходящую через точки A_1, A_2, A_3, заданные своими координатами (таблица 6).

Таблица № 6

№ варианта	A	A_1	A_2	A_3
1	(-12,7,-1)	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-5,-2,0)
2	(1,-6,-5)	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)

3	(-7,0,-1)	(-3,-1,1)	(-9,1,-2)	(3,-5,4)
4	(-2,4,2)	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)
5	(2,-1,4)	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)
6	(-5,-9,1)	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)
7	(3,-2,-9)	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)
8	(-6,7,-10)	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)
9	(-2,3,5)	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)
10	(-3,4,-5)	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)
11	(4,3,0)	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)
12	(-21,20,-16)	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(3,1,-4)
13	(3,6,68)	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)
14	(2,-10,8)	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)
15	(-3,2,7)	(1,-1,2)	(2,1,2)	(1,1,4)
16	(5,-4,5)	(1,3,6)	(2,2,1)	(-1,0,1)
17	(-12,1,8)	(-4,2,6)	(2,-3,0)	(-10,5,8)
18	(10,1,8)	(7,2,4)	(7,-1,-2)	(-5,-2,-1)
19	(-3,1,8)	(2,1,4)	(3,5,-2)	(-7,-3,2)
20	(10,-8,-7)	(-1,-5,2)	(-6,0,-3)	(3,6,-3)
21	(-4,-13,6)	(0,-1,-1)	(-2,3,5)	(1,-5,-9)
22	(-3,-6,-8)	(5,2,0)	(2,5,0)	(1,2,4)
23	(14,-3,7)	(2,-1,-2)	(1,2,1)	(5,0,-6)
24	(-6,5,5)	(-2,0,-4)	(-1,7,1)	(4,-8,-4)
25	(-1,-8,7)	(14,4,5)	(-5,-3,2)	(-2,-6,-3)
26	(-13,-8,16)	(1,2,0)	(3,0,-3)	(5,2,6)
27	(-5,3,7)	(2,-1,2)	(1,2,-1)	(3,2,1)
28	(2,3,8)	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)
29	(-5,-4,8)	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)
30	(-3,-7,6)	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)

Образец решения задачи №6

Пусть координаты точек равны $A(1,-1,2)$, $A_1(1,5,-7)$, $A_2(-3,6,3)$, $A_3(-2,7,3)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3. Если $M(x,y,z)$ – произвольная точка этой плоскости, то векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1M}$ должны быть компланарными, а значит их смешанное произведение должно быть равно нулю.

$$\overline{A_1M}\cdot\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix}=(x-1)(-10)-(y-5)(-10)+(z+7)(-5)=$$

$$=-10x+10y-5z-75.$$

Итак, уравнение искомой плоскости есть: $2x-2y+z+15=0$.

Далее найдём уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно найденной плоскости. Нормальный вектор плоскости $\overline{n}(2,-2,1)$ будет направляющим вектором для искомой прямой. Следовательно, каноническое уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Для дальнейших вычислений удобно перейти к параметрической форме:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Для того чтобы найти основание перпендикуляра определим координаты точки пересечения найденных прямой и плоскости.
$$2(1+2t) - 2(-1-2t) + (2+t) + 15 = 0,$$
$$9t + 21 = 0, \quad t = -7/3,$$
$$x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{11}{3},\ y = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{11}{3},\ z = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Критерии оценки

Оценка «отлично» выставляется студенту, если практическая задача решена полностью с соответствующими математическим выкладками.

Оценка «хорошо» - выставляется студенту, если практическая задача решена полностью без подробных выкладок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача решена не полностью.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача не решена.

Оценка выставляется в журнале посещаемости студентов.

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет по землеустройству»

Кафедра Высшей математики и физики
(наименование кафедры)

Оценочное средство - тестирование

Составитель ________________________ А.В. Червяков
(подпись)

«____»__________________20 г.

Москва 2011

Тестирование по результатам изучения разделов дисциплины

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОВЕРЯЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ фонда тестовых заданий **ОК-10**

Формулировка ОК-10 - **Использует** основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования..

Тестовые задания

Примерные вопросы теста для контроля знаний

Тест №1

1. Рангом матрицы называется:
а) количество строк матрицы;
б) количество столбов матрицы;
в) наивысший порядок отличный от нуля миноров;
г) размерность матрицы.
2. Если определитель системы линейных алгебраических уравнений не равен 0, то система:
а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесчисленное количество решений;
г) имеет 3 решения.
3. Какие из этих 3-х точек лежат в одной плоскости:
а) (1,1,1), (2,2,2), (0,-1,3);
б) (0,0,1), (2,-1,0), (3,3,3);
в) (0,0,0), (1,-1,1), (2, 0, 1);
д) все предыдущие
4. Геометрическая интерпретация векторного произведения есть:
а) площадь параллелограмма;
б) объём параллелепипеда;
в) работа;
г)расстояние между точками.

Тест №2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x}$ равен:

а) ∞; б) 0; в) 4; г) на «0» делить нельзя!

2. Функции $\sin x$ и x при $x\to\infty$ будут эквивалентны друг другу, т.к.:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; б) $\sin x = x$; в) по второму замечательному пределу;

г) они не являются эквивалентными.

3. $\lim\limits_{x\to 0} = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ равен:

а) 0; б) ∞; в) получаем неопределённость вида $0\cdot\infty$;
г) получаем неопределённость вида $0\cdot 0$.

4. В выражении $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{i}$, есть:

а) сила тока; б) единичный орт; в) $\sqrt{-1}$; г) момент инерции рамки из n витков тонкой проволоки.

Тест №3

1. Касательная к графику функции $y=\sin x$ в точке с абсциссой x = 0 образует с осью Ox угол:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) 60°; 4) π.

2. Наибольшее значение функции $y=x^3-3x+3$ на отрезке [-1,5; 2,5] достигается

1) в точке x = -1; 2) в точке x = 1; 3) x = 2,5; 4) x = -1,5.

3. Область определения функции $y=\ln|x-3|$ есть интервал:

1) $x\in(0;\infty)$;

2) $x\in(-\infty;+\infty)$;

3) $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$;

4) правильный ответ отсутствует в предыдущих вариантах.

4. $\overline{grad}\ f(x,y)$ в точке O(1, 1) для $f(x,y)=x^2y$ есть вектор:

1) $\overline{grad}\ f=2\bar{i}+\bar{j}$; 2) $\overline{grad}\ f=\bar{i}-2\bar{j}$;

3) $\overline{grad}\ f=2\bar{i}-\bar{j}$; 4) $\overline{grad}\ f=2\bar{i}+2\bar{j}$.

Тест №4

1. При замене переменной в опреде6ленном интеграле пределы интегрирования:

1) изменяются; 2) остаются постоянными;

3) меняются местами; 4) меняют знак на противоположный.

2. $\int\frac{\sin x dx}{\cos x}$ равен

1) $-\ln|\cos x|+c$; 2) $\ln|\cos x|+c$;

3) $\frac{3\cos^3 x}{2}+c$; 4) относится к разряду «не берущихся» интегралов.

3. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$

1) расходится; 2) сходится;

3) не вычисляется; 4) равен 1.

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{3} x dx$ равен

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{8}{3}$.

Ответы к тестам:

Тест 1

1.-в); 2. а); 3. д); 4. а)

Тест 2

1.-а); 2. а); 3. а); 4. б)

Тест 3

1.-б); 2. в); 3. в); 4. а)

Тест 4

1.-а); 2. а); 3. а); 4. а)

Критерии оценки

Данное тестирование ставит целью оценить уровень освоения студентами изученного раздела дисциплины как промежуточное тестирование, уровень освоения материала в целом по дисциплине, а также знаний и умений, предусмотренных компетенциями.

Тестирование можно проводить для студентов всех форм обучения в письменной форме на бумажных носителях в течение 20 минут или с использованием соответствующих программ после каждого раздела. Каждый студент получает бланк с тестовыми материалами, в каждом по 5 тестовых заданий и письменно готовит ответы на поставленные задания путем подчеркивания выбранного ответа.

По истечении 20 минут преподаватель анализирует и оценивает выполненные студентами задания. В целом по дисциплине тестирование проводится 2 часа по всем вопросам тестовых заданий.

По результатам тестирования преподавателем в журнале учета занятий каждому студенту выставляется оценка «зачтено» или «незачтено».

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Государственный университет по землеустройству»

Кафедра Высшей математики и физики
(наименование кафедры)

Оценочное средство – расчетно-графическая работа

Составитель ________________________ А.В. Червяков
(подпись)

«____»__________________20 г.

Москва 2011

Оценочное средство расчетно-графическая работа

Проверяемые компетенции ОК-10, Формулировка ОК-10 - **Использует** основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования..

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление
3. Выполненные задания
8. Список использованных источников

Примеры типовых расчетно-графических работ и образцы их выполнения *

Задача №1. Найти неопределённые интегралы.

1	$\int (4-3x)\cdot e^{-3x}dx$	16	$\int (4x-3)\cdot e^{-2x}dx$
2	$\int (3x+4)\cdot e^{3x}dx$	17	$\int arctg\sqrt{2x-1}dx$
3	$\int (4-16x)\cdot \sin 4xdx$	18	$\int arctg\sqrt{5x-1}dx$
4	$\int (1-6x)\cdot e^{2x}dx$	19	$\int (3x-2)\cdot \cos 5xdx$
5	$\int \ln(4x^2+1)dx$	20	$\int (4x+7)\cdot \cos 3xdx$
6	$\int arctg\sqrt{6x-1}dx$	21	$\int (2x-5)\cdot \cos 4xdx$
7	$\int (2-9x)\cdot e^{-3x}dx$	22	$\int (x+5)\cdot \sin 3xdx$
8	$\int arctg\sqrt{3x-1}dx$	23	$\int (4x+3)\cdot \sin 5xdx$
9	$\int (5x+6)\cdot \cos 2xdx$	24	$\int (\sqrt{2}-8x)\cdot \sin 3xdx$
10	$\int (\sqrt{2}\cdot x-3)\cdot \cos 2xdx$	25	$\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
11	$\int arctg\sqrt{4x-1}dx$	26	$\int (8-3x)\cdot \cos 5xdx$
12	$\int (4x-2)\cdot \cos 2xdx$	27	$\int (2-3x)\cdot \sin 2xdx$
13	$\int (5x-2)\cdot e^{3x}dx$	28	$\int (7x-10)\cdot \sin 4xdx$
14	$\int \ln(x^2+4)dx$	29	$\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

15	$\int (2-4x)\cdot \sin 2x dx$	30	$\int \frac{x\cdot \cos x}{\sin^3 x} dx$

*Полный перечень расчетно-графических работ содержится в [1] Соловьёв И.А., Шевелёв В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике, Части 1 – 3, Лань. 2009.

бразец решения задачи №1

Найти $\int x\cdot \cos x dx$.

Полагаем $u = x, dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$ и $v = \int \cos x dx = \sin x$. Подставив в формулу интегрирования по частям, находим

$$\int x\cdot \cos x dx = x\cdot \sin x - \int \sin dx = x\cdot \sin x + \cos x + C.$$

Задача №2. Вычислить определённые интегралы.

1	$\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$	16	$\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$
2	$\int\limits_0^1 \frac{4arctgx - x}{1+x^2} dx$	17	$\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$
3	$\int\limits_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}$	18	$\int\limits_{-1}^0 \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$
4	$\int\limits_0^{1/2} \frac{8x - arctg 2x}{1+4x^2} dx$	19	$\int\limits_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$
5	$\int\limits_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx$	20	$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cdot \cos x + \sin x}{(x\cdot \sin x)^2} dx$
6	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2} dx$	21	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
7	$\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	22	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\cdot \sqrt{x^2+1}}$
8	$\int\limits_0^{\pi/4} tgx\cdot \ln\cos x dx$	23	$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\cdot \sqrt{x^2-1}}$
9	$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$	24	$\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
10	$\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$	25	$\int\limits_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

11	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^2}dx$	26	$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4}dx$
12	$\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$	27	$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
13	$\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$	28	$\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
14	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx+x}{1+x^2}dx$	29	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$
15	$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$	30	$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}}dx$

Образец решения задачи №2

Вычислить $\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x+3)^3}}dx$. Сделаем замену переменных $u=x^2+x+3$. Тогда $du=(2x+1)dx$, $u(1)=5$, $u(2)=9$. Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x+3)^3}}dx=\int_5^9 \frac{du}{u^{3/2}}=-\frac{2}{\sqrt{u}}\Bigg|_5^9=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{3}.$$

Задача №3. Найти неопределённые интегралы.

1	$\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$	16	$\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx$
2	$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$	17	$\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-4)(x-2)}dx$
3	$\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$	18	$\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$
4	$\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$	19	$\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$
5	$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$	20	$\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx$
6	$\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-4)(x-3)}dx$	21	$\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$

7	$\int\frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$	22	$\int\frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}dx$
8	$\int\frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$	23	$\int\frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx$
9	$\int\frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$	24	$\int\frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx$
10	$\int\frac{-x^5+9x^3+4}{x^2-2x}dx$	25	$\int\frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}dx$
11	$\int\frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$	26	$\int\frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}dx$
12	$\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$	27	$\int\frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{x(x-1)(x+3)}$
13	$\int\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx$	28	$\int\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx$
14	$\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx$	29	$\int\frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}dx$
15	$\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$	30	$\int\frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}dx$

Образец решения задачи №3

Найти неопределённый интеграл $\int\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx$. Под знаком интеграла неправильная дробь, выделим её целую часть путём деления числителя на знаменатель. Получаем

$$\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}=\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x^3-2x^2-3x}=2+\frac{3x^2-x-12}{x^3-2x^2-3x}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2-x-12}{x^3-2x^2-3x}=\frac{3x^2-x-12}{x(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1},$$

$$3x^2-x-12=A(x^2-2x-3)+B(x^2+x)+C(x^2-3x)=(A+B+C)x^2+$$
$$+(-2A+B-3C)x-3A$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A+B+C=3, \\ -2A+B-3C=-1, \\ -3A=-12. \end{cases}$$

Находим: $A=4, B=1, C=-2$. Стало быть

$$\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}=2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x+1}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx=\int\left(2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x=1}\right)dx=2x+4\ln|x|+\ln|x-3|-$$

$$-2\ln|x+1|+C=2x+\ln\left(\frac{x^4|x-3|}{(x+1)^2}\right)+C.$$

Задача №4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

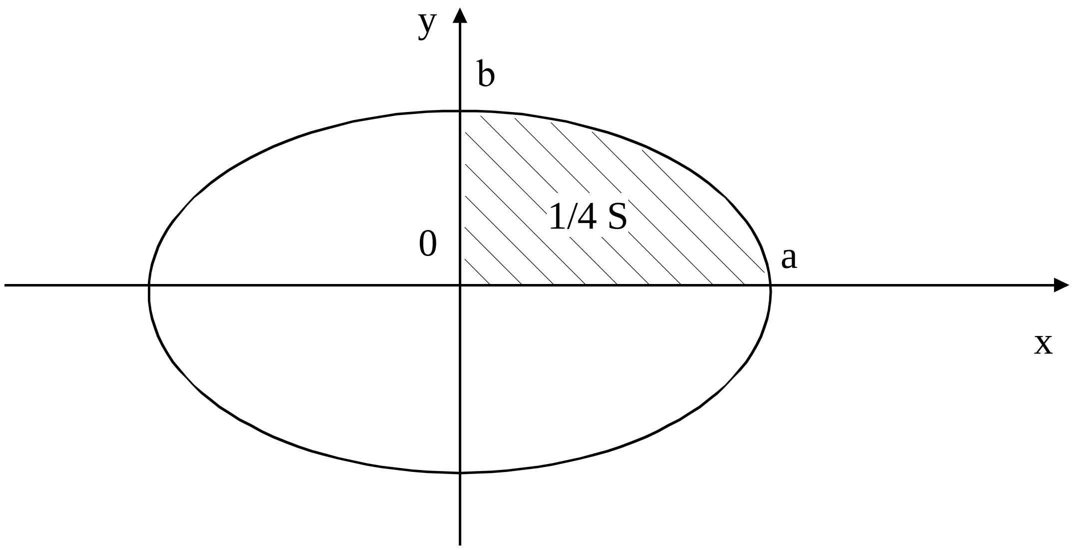
1	$\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cdot\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2 \quad (x\ge 2)$.	16	$\begin{cases} x=6\cdot(t-\sin t), \\ y=6\cdot(1-\cos t), \end{cases}$ $y=9 \quad (0<x<12\pi, y\ge 9)$.
2	$\begin{cases} x=4\cdot(t-\sin t), \\ y=4\cdot(1-\cos t), \end{cases}$ $y=4 \quad (0<x<8\pi, y\ge 4)$.	17	$\begin{cases} x=3\cdot\cos t, \\ y=8\cdot\sin t, \end{cases}$ $y=4 \quad (y\ge 4)$.
3	$\begin{cases} x=2\cdot\cos t, \\ y=6\cdot\sin t, \end{cases}$ $y=3 \quad (y\ge 3)$.	18	$\begin{cases} x=8\cdot\cos^3 t, \\ y=4\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3} \quad (x\ge 3\sqrt{3})$.
4	$\begin{cases} x=16\cdot\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=6\sqrt{3} \quad (x\ge 6\sqrt{3})$.	19	$\begin{cases} x=10\cdot(t-\sin t), \\ y=10\cdot(1-\cos t), \end{cases}$ $y=15 \quad (0<x<20\pi, y\ge 15)$.
5	$\begin{cases} x=3\cdot(t-\sin t), \\ y=3\cdot(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3 \quad (0<x<6\pi, y\ge 3)$.	20	$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cdot\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\cdot\sin t, \end{cases}$ $y=4 \quad (y\ge 4)$.

6	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cdot\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = 3 \quad (y \geq 3).$	21	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$
7	$\begin{cases} x = 32\cdot\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 \quad (x \geq 4).$	22	$\begin{cases} x = 9\cdot\cos t, \\ y = 4\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = 2 \quad (y \geq 2).$
8	$\begin{cases} x = 6\cdot(t - \sin t), \\ y = 6\cdot(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 6).$	23	$\begin{cases} x = 24\cdot\cos^3 t, \\ y = 2\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}).$
9	$\begin{cases} x = 6\cdot\cos t, \\ y = 4\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3}).$	24	$\begin{cases} x = 2\cdot(t - \sin t), \\ y = 2\cdot(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2).$
10	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cdot\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1 \quad (x \geq 1).$	25	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cdot\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = 5 \quad (y \geq 5).$
11	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cdot\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = 2 \quad (y \geq 2).$	26	$\begin{cases} x = 8\cdot\cos^3 t, \\ y = 8\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1 \quad (x \geq 1).$
12	$\begin{cases} x = 16\cdot\cos^3 t, \\ y = 2\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2 \quad (x \geq 2).$	27	$\begin{cases} x = 8\cdot(t - \sin t), \\ y = 8\cdot(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 12).$
13	$\begin{cases} x = 2\cdot(t - \sin t), \\ y = 2\cdot(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 3).$	28	$\begin{cases} x = 3\cdot\cos t, \\ y = 8\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}).$
14	$\begin{cases} x = 6\cdot\cos t, \\ y = 2\cdot\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}).$	29	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cdot\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2 \quad (x \geq 2).$

15	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cdot\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\cdot\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4 \quad (x \geq 4).$	30	$\begin{cases} x = 4\cdot(t - \sin t), \\ y = 4\cdot(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6).$

Образец решения задачи №4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cdot\cos t,\ y = b\cdot\sin t$. Найдём сначала $1/4$ площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от $\pi/2$ до 0. Находим



$$1/4\cdot S = \int_{\pi/2}^{0} b\cdot\sin t\cdot(-a\cdot\sin t)dt = -ab\cdot\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\cdot\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $S = \pi ab$.

Оценка	**Критерии оценки**
зачтено	Выставляется студенту, если он логически верно выполнил задание. При решении использовал не только лекционный материал, но и рекомендованные основные и дополнительные источники.
Не зачтено	Студент не выполнил индивидуальные задания. Не ответил на поставленные вопросы

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ ФОС

Составители:

Должность, звание______________ доцент Червяков А.В.

(подпись)

Сведения об экспертах:

Должность, звание ______________ Ф.И.О

(подпись)