

УДК 514.1

## К вопросу о перечислении архимедовых многогранников пространства Лобачевского<sup>1</sup>

©2011 г. В. С. Макаров<sup>2</sup>, П. В. Макаров<sup>3</sup>

Поступило в сентябре 2010 г.

*Светлой памяти Бориса Николаевича Делоне*

Работа посвящена описанию класса архимедовых многогранников трехмерного пространства Лобачевского, что технически сводится к исследованию архимедовых разбиений плоскости Лобачевского. Исследуются возможности получения архимедовых разбиений методами, обычно применяемыми на сфере и на плоскости Евклида. Указывается на возможности построения таких разбиений путем использования тех или иных типов федоровских групп плоскости Лобачевского. Предлагается общий подход к проблеме классификации архимедовых разбиений плоскости Лобачевского.

### 1. ПЛАТОНОВЫ РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Борис Николаевич Делоне в свое время уделял большое внимание теории планигонов на плоскости Евклида [3, 5, 6]. Мы попытались в этой работе дать набросок теории архимедовых разбиений плоскости Лобачевского (и, следовательно, архимедовых многогранников пространства Лобачевского — теории, которая является лишь небольшой частью общей теории планигонов плоскости Лобачевского).

Со времен древней Эллады достаточно хорошо известны два класса многогранников с правильными гранями: тела Платона (правильные многогранники) и тела Архимеда (равноугольно полуправильные многогранники). Обычно правильным многогранником называют многогранник, все грани которого — равные правильные многоугольники и все многогранные углы (гоноэдры) правильны. Мы будем придерживаться определения, подчеркивающего максимальную симметричность правильного многогранника: многогранник будем называть правильным, если его группа симметрии действует транзитивно на множестве его флагов. *Флаг* — это совокупность какой-нибудь вершины многогранника, ребра, выходящего из этой вершины, и грани, инцидентной выделенному ребру. Договоримся и разбиение плоскости (пространства) называть *платоновым*, если группа его симметрии действует транзитивно на множестве его флагов. Очевидно, что платоново разбиение плоскости (пространства) есть разбиение плоскости (пространства) на равные правильные многоугольники (многогранники). Очевидно, что такое разбиение является правильным в общепринятом понимании этого термина: разбиение называется правильным, если группа его симметрии действует транзитивно на множестве его многоугольников (многогранников). Но разбиение плоскости (пространства) на равные правильные многоугольники (многогранники) обладает значительно более богатой группой симметрии, чем та, которая необходима для обеспечения общепринятого условия правильности.

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00633).

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.  
E-mail: vsmak@mail.ru

<sup>3</sup>Московский государственный горный университет, Москва, Россия.  
E-mail: pvmakaroff@gmail.com

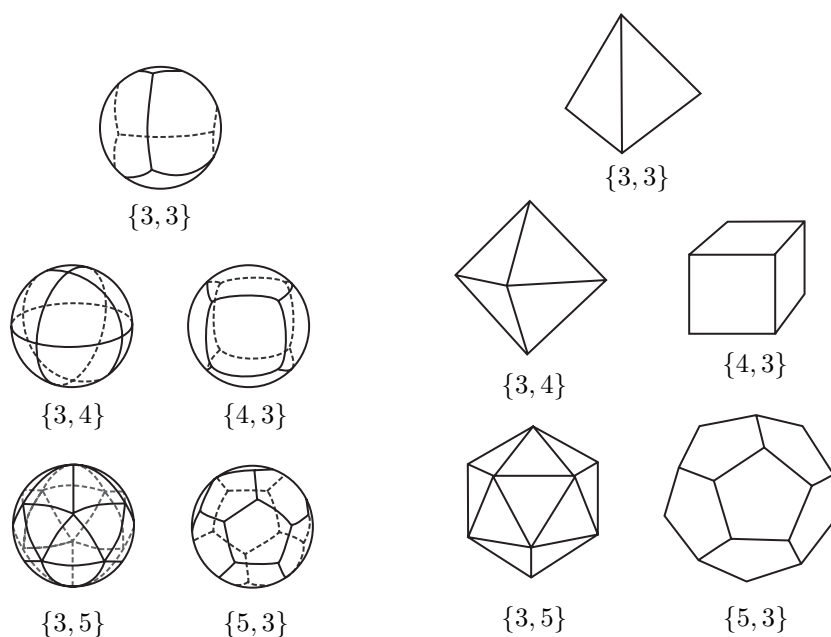


Рис. 1. Платоновы разбиения сферы  $S^2$  и тела Платона

Именно это и побудило нас ввести для класса разбиений плоскости (пространства) равными правильными многоугольниками (многогранниками) термин платонова разбиения.

Архимедовым (равноугольно полуправильным) многогранником принято называть многогранник (отличный от правильного), все грани которого — правильные многоугольники, а группа симметрии которого действует транзитивно на множестве его гоноэдров (в дуальном равногранно полуправильном многограннике эта же группа действует транзитивно на множестве клеток, а многогранные углы правильные). Естественно и разбиение плоскости (пространства) называть архимедовым (сокращенно А-разбиением), если все его клетки — правильные многоугольники (многогранники), среди клеток имеются различные, а группа симметрии разбиения действует транзитивно на множестве звезд его вершин. Напомним, звездой  $k$ -мерной грани (в частности, вершины) разбиения  $n$ -мерного пространства,  $n > k$ , принято называть множество  $n$ -клеток разбиения, имеющих данную  $k$ -клетку в качестве своей  $k$ -грани.

Всякий платонов многогранник естественным образом связан с платоновым разбиением описанной около него сферы  $S^2$  (проектирование многогранника из его центра на указанную сферу, см. рис. 1). Аналогичным образом всякий архимедов многогранник порождает архимедово разбиение описанной около него сферы.

Далее мы увидим, что в пространстве Лобачевского ровно таким же образом связаны (за счет проектирования гиперболической или параболической связкой прямых) специфические бесконечные многогранники рассматриваемых классов с проекциями этих многогранников на эквидистантную поверхность или на орисферу. Поэтому мы будем в основном говорить о (платоновых и архимедовых) разбиениях плоскости (пространства), оставляя читателю возможность перефразировать все сказанное на языке многогранников.

В данной работе мы в основном ограничимся лишь разбиениями плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$ . На плоскости Лобачевского, кроме конечных правильных  $p$ -угольников, естественно рассматривать и бесконечные (см., например, [25, р. 97; 9, 11]), вписанные в орициклы или эквидистанты (в  $\Lambda^3$  аналогичные бесконечные правильные многогранники с конечными гранями подробно описаны, см. [10, с. 440]). При этом мы рассмотрим сначала платоновы и архимедовы разбиения  $\Lambda^2$  конечными правильными многоугольниками и лишь затем перейдем к архимедовым разбиениям с бесконечными (правильными) клетками.

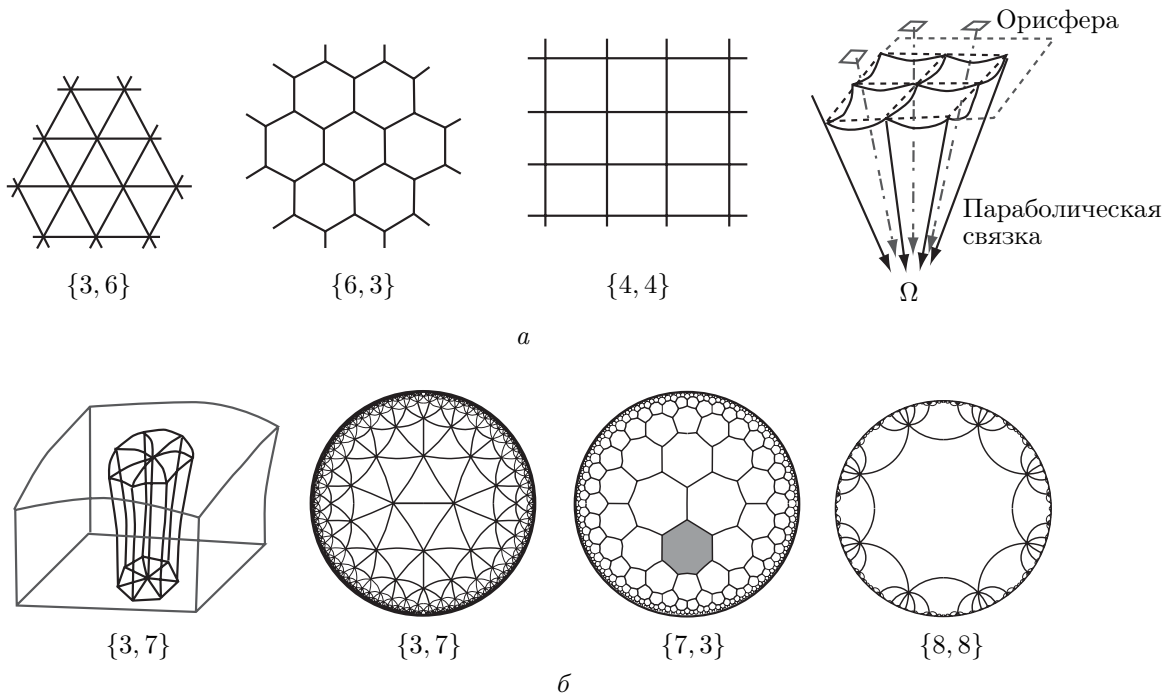
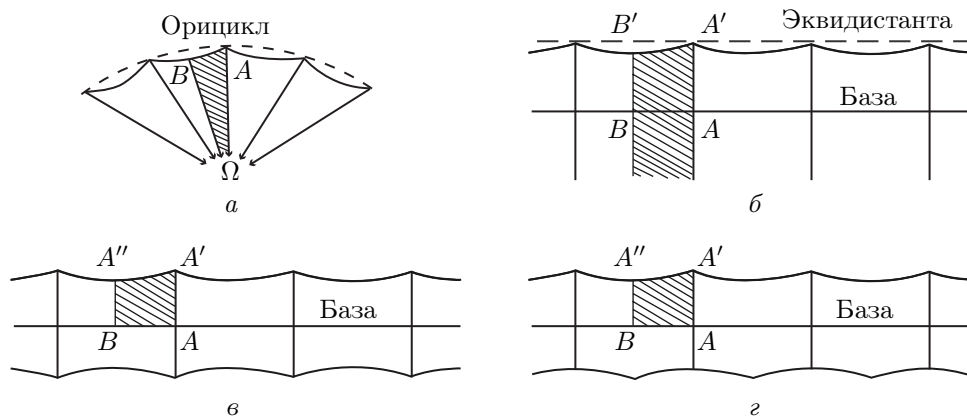


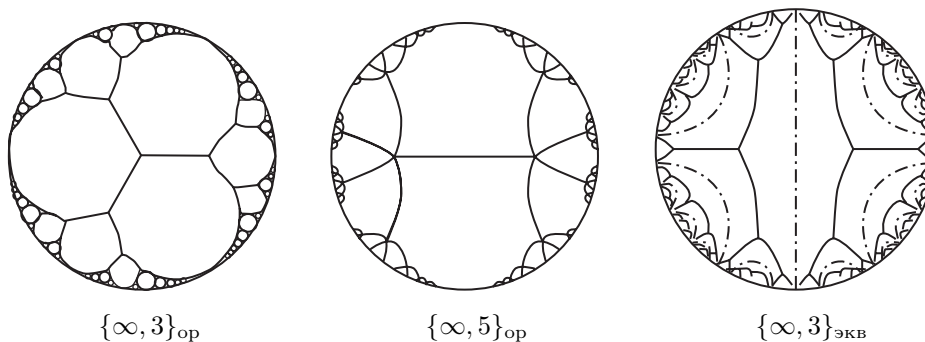
Рис. 2. Платоновы разбиения плоскостей Евклида (а) и Лобачевского (б)

Напомним перечень всех платоновых разбиений плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  (см., например, [10, 16]). При описании платонова (правильного) многогранника или платонова разбиения мы обычно будем пользоваться символом Шлефли  $\{p, q\}$ , который указывает, что разбиение выполнено из правильных конгруэнтных  $p$ -угольников, сходящихся по  $q$  в узле разбиения (или соответственно многогранник Платона выполнен из равных правильных  $p$ -угольников, сходящихся по  $q$  в вершине). Символ  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  обычно будет означать, что мы имеем дело с архимедовым разбиением (архимедовым многогранником), в узле разбиения которого (в вершине многогранника) сходятся правильные  $p_i$ -угольники,  $i = 1, \dots, k$ , в указанном выше (циклическом) порядке. Используя сумму углов прямоугольного треугольника, легко видеть, что платоновым разбиениям сферы соответствуют такие пары натуральных чисел  $p$  и  $q$ , для которых  $\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} > \frac{\pi}{2}$  (см., например, [25, р. 95]), что приводит к решениям  $\{3, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{4, 3\}$ ,  $\{5, 3\}$ . На евклидовой плоскости мы получаем соответственно уравнение  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$  и решения  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 4\}$ ,  $\{6, 3\}$ . На плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  мы получаем соответственно неравенство  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$  и решения  $\{3, q\}$  при  $q \geq 7$ ,  $\{4, q\}$  при  $q \geq 5$ ,  $\{5, q\}$ ,  $\{6, q\}$  при  $q \geq 4$ ,  $\{p, q\}$  при  $p \geq 7$  и  $q \geq 3$ . Примеры платоновых разбиений евклидовой плоскости  $E^2$  и плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  даны на рис. 2. Авторы благодарны Я.В. Кучериненко за помощь при подготовке рисунков разбиений и многогранников пространства (плоскости) Лобачевского в интерпретации А. Пуанкаре на круге. Часть рисунков мы заимствовали из широко известных книг [22] и [25]. Таким образом, мы видим, что в пространстве Лобачевского  $\Lambda^3$ , кроме хорошо знакомых пяти тел Платона, имеются еще три вписанных в орисферу правильных бесконечных многогранника (с конечными гранями) и бесконечно много эквидистантных правильных бесконечных многогранников с  $p$ -угольными гранями и  $q$ -гранными углами ( $q$ -гоноэдрами).

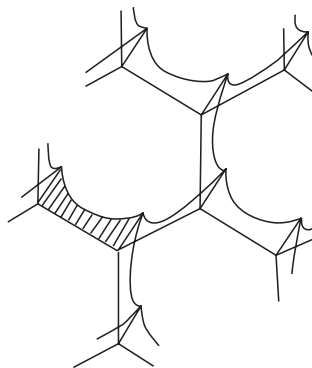
Но если мы, следуя Ф. Энгелю, В.Ф. Кагану [10], Г.С.М. Кокстеру [24] и другим, признаем естественным рассматривать правильные многогранники в  $\Lambda^3$ , оси симметрии которых образуют параболическую или гиперболическую связку, то столь же естественно будет и рассматривать аналогичную ситуацию на плоскости (следуя, например, Л. Фейеш-Тоту [25]). Это



**Рис. 3.** Бесконечные правильные многоугольники на  $\Lambda^2$ : *a* — правильный параболический многоугольник; *б* — правильный эквидистантный многоугольник; *в* — двумерная линза; *г* — скошенная двумерная линза



**Рис. 4.** Примеры разбиений плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  бесконечными многоугольниками



**Рис. 5.** Бесконечный правильный эквидистантный многогранник с орициклическими гранями

приводит нас к бесконечным правильным многоугольникам, вписанным в орицикл, эквидистанту<sup>4</sup> или пару эквидистант<sup>5</sup> (см. рис. 3).

Используя зависимость угла такого многоугольника от его линейных размеров, мы легко убеждаемся, что такие многоугольники могут разбивать плоскость Лобачевского, сходясь в узлах по  $q$  штук,  $q \geq 3$  (см. рис. 4).

<sup>4</sup>Выпуклая оболочка вершин этого многоугольника не совпадает с ним и представляет собой платонов многоугольник, пропущенный на рис. 3 (*прим. ред.*).

<sup>5</sup>Здесь нет двух зеркально симметричных многоугольников, группы симметрии которых транзитивны на сторонах и вершинах, а не на флагах (*прим. ред.*).

Если (как и в случае разбиений  $\Lambda^2$  конечными правильными равными многоугольниками) мы поднимем все разбиение с базовой плоскости на соответствующую эквидистантную поверхность, то в первых двух случаях (см. рис. 3) получим бесконечные правильные многогранники с бесконечными правильными гранями, вписанные в эквидистантные поверхности. На рис. 5 дано изображение такого многогранника при  $q = 3$ ; плоскости его (орициклических) граней параллельны базовой плоскости; поэтому из него легко получить линзовый (в смысле [13]) многогранник.

## 2. АРХИМЕДОВЫ РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО, АНАЛОГИЧНЫЕ КЛАССИЧЕСКИМ

Приступая к вопросу об описании класса архимедовых разбиений плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$ , мы вначале убедимся, что все те приемы, которые обычно применяются к платоновым многогранникам (разбиениям) для получения из них архимедовых многогранников (архимедовых разбиений на сфере  $S^2$  и на евклидовой плоскости  $E^2$ ), обычно считающиеся классическими (иной подход см. в [23]), можно использовать и для получения архимедовых разбиений  $\Lambda^2$ .

Получаемые при этом конструкции, как правило, сохраняют достаточно богатые подгруппы собственных движений правильных многоугольников. Тем не менее стоит отметить, что, как и в случае архимедовых разбиений сферы  $S^2$  и евклидовой плоскости  $E^2$ , возможны архимедовы разбиения плоскости  $\Lambda^2$ , правильные многоугольники которых переходят в себя лишь при тождественном преобразовании из группы симметрии архимедова разбиения. Исследуем первым делом те возможности получения архимедовых конечногранных многогранников в  $\Lambda^3$ , которые нам может предоставить аналогия с выводом архимедовых разбиений сферы  $S^2$  и евклидовой плоскости  $E^2$ . Подчеркнем, что названия методов получения архимедовых многогранников чисто условные.

### I. Усечение вершин правильных многогранников (см. рис. 6).

Этим способом получают следующие архимедовы многогранники:

- 1) усеченный тетраэдр (3, 6, 6) из тетраэдра {3, 3};
- 2) усеченный куб (3, 8, 8) из куба {4, 3};
- 3) усеченный октаэдр (4, 6, 6) из октаэдра {3, 4};
- 4) усеченный икосаэдр (5, 6, 6) из икосаэдра {3, 5};
- 5) усеченный додекаэдр (3, 10, 10) из додекаэдра {5, 3}.

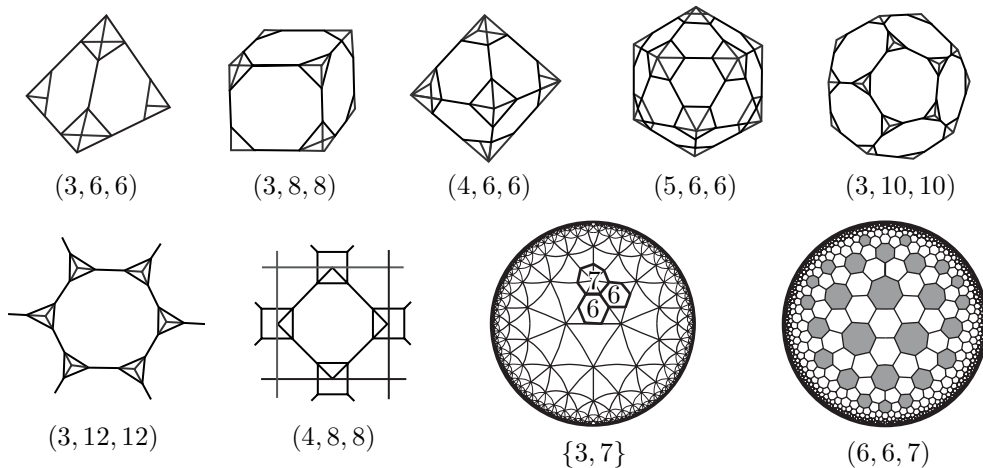


Рис. 6. Усечение вершин

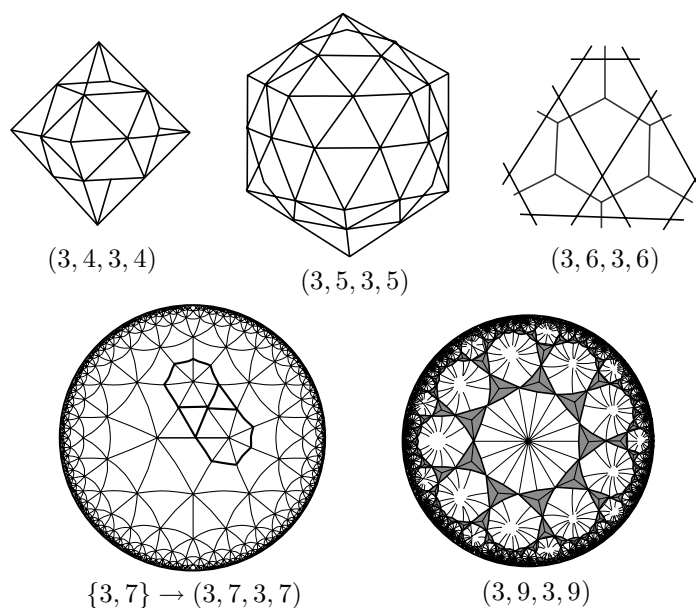


Рис. 7. Почти правильные многогранники и разбиения

На  $E^2$  получаются следующие архимедовы разбиения:

- 1) разбиение  $(3, 12, 12)$  из  $\{6, 3\}$ ;
- 2) разбиение  $(4, 8, 8)$  из  $\{4, 4\}$ .

На  $\Lambda^2$  этим же способом из разбиения  $\{p, q\}$ , где  $(p-2)(q-2) > 4$ , очевидно получается разбиение  $(2p, 2p, q)$  в полной аналогии с  $S^2$  и  $E^2$ .

Отсюда видно, что типы разбиений вида  $(2p, 2p, q)$  реализуются либо на  $S^2$ , либо на  $E^2$ , либо на  $\Lambda^2$ . Все полученные архимедовы разбиения (и соответствующие многогранники в  $\Lambda^3$ ) имеют симплициальное сходжение в узлах, где сходятся два конгруэнтных четноугольника и один многоугольник произвольной четности.

II. Второй метод получения архимедовых разбиений (многогранников) из платоновых — центрореберное усечение вершин (отсекаются вершины многогранников так, что секущие прямые (плоскости) проходят через середины ребер тела Платона, см. рис. 7).

Этим методом получаются следующие почти правильные разбиения (многогранники). Напомним, что почти правильным называется многогранник, у которого все грани правильные (среди которых есть различные), а группа симметрии действует транзитивно на множестве звезд его ребер.

На  $S^2$  (для краткости мы используем стрелки, слева от которых пишем исходный объект, а справа результат применения метода):

- 1) симплекс  $\{3, 3\} \rightarrow (3, 3, 3, 3) \equiv \{3, 4\}$  — октаэдр;
- 2) октаэдр  $\{3, 4\} \rightarrow (3, 4, 3, 4) \equiv (4, 3, 4, 3)$  — кубоктаэдр;
- 3) куб  $\{4, 3\} \rightarrow (4, 3, 4, 3) \equiv (3, 4, 3, 4)$  — кубоктаэдр;
- 4) икосаэдр  $\{3, 5\} \rightarrow (3, 5, 3, 5) \equiv (5, 3, 5, 3)$  — икосододекаэдр;
- 5) додекаэдр  $\{5, 3\} \rightarrow (5, 3, 5, 3) \equiv (3, 5, 3, 5)$  — икосододекаэдр.

На  $E^2$ :

- 1)  $\{3, 6\} \rightarrow (3, 6, 3, 6)$ ;
- 2)  $\{4, 4\} \rightarrow (4, 4, 4, 4) \equiv \{4, 4\}$ ;
- 3)  $\{6, 3\} \rightarrow (6, 3, 6, 3)$ .

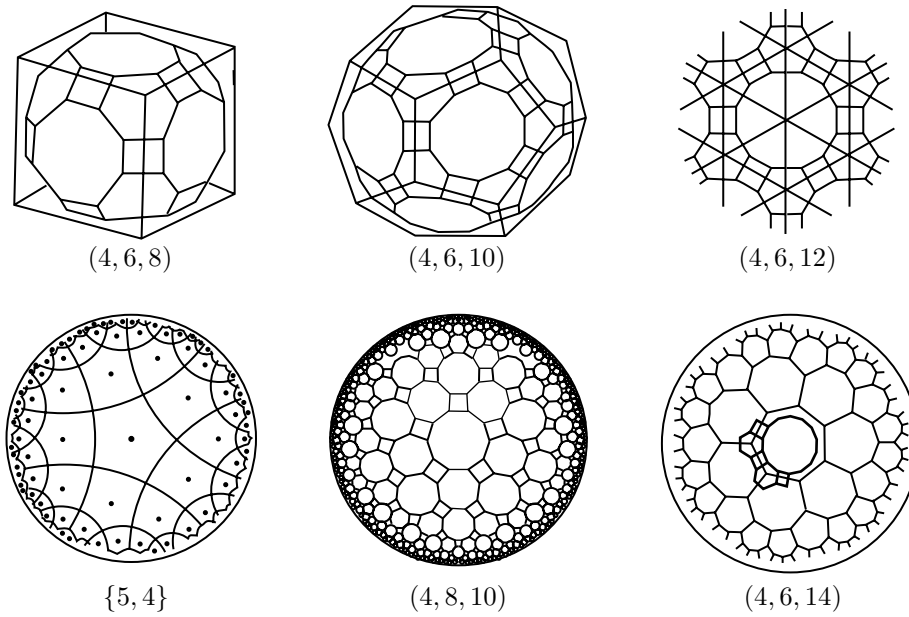


Рис. 8. Разбиения вида  $(4, 2p, 2q)$

На  $\Lambda^2$ :  $\{p, q\} \rightarrow (p, q, p, q)$  — почти правильные разбиения.

Очевидно, что все случаи реализуются. Примеры (см. рис. 7):

- 1)  $\{3, 7\} \rightarrow (3, 7, 3, 7)$ ;
- 2)  $\{3, 9\} \rightarrow (3, 9, 3, 9)$ .

Если предыдущим методом получались лишь симплициальные звезды вершин (и при этом две клетки — обязательно равные четноугольные многоугольники и лишь одна произвольной четности), то вторым (центрореберным) усечением мы получаем архимедовы разбиения типа  $(p, q, p, q)$ , т.е. в вершинах сходятся четыре клетки (и притом клетки, центрально симметричные относительно узла, конгруэнтны). В этом случае никакого ограничения на четности не налагается. Вывод: существуют разбиения типа  $(2p, 2q - 1, 2p, 2q - 1)$  и типа  $(2p - 1, 2q - 1, 2p - 1, 2q - 1)$ ; в последнем типе все четыре клетки нечетноугольные.

Имеется обобщающая серия разбиений  $(p, q, p, q, \dots, p, q)$ , существование которой очевидно следует из симметрии звезды. Эта обобщающая серия разбиений легко получается из разбиения плоскости Лобачевского на равносторонние полуправильные  $2k$ -угольники, сходящиеся в вершинах по  $p$  и по  $q$  соответственно; фактически она рассмотрена в [11, с. 106] и в [12, § 1]. Из этого же разбиения методами усечения вершин и вариации параметра относительно легко получаются А-разбиение еще одного типа  $(q, 2p, k, 2p)$  и обобщающая его серия  $(q, 2p, k, 2p, q, 2p, k, 2p, \dots, q, 2p, k, 2p)$ .

III. Третий метод — одновременное усечение и вершин, и ребер (общий тип). Этим методом получают следующие архимедовы многогранники (см. рис. 8).

На  $S^2$ :

- 1) симплекс  $\{3, 3\} \rightarrow (4, 6, 6)$  — усеченный октаэдр (уже было);
- 2) октаэдр  $\{4, 3\} \rightarrow (4, 6, 8) \equiv (4, 8, 6)$  — усеченный кубоктаэдр;
- 3) куб  $\{3, 4\} \rightarrow (4, 6, 8) \equiv (4, 8, 6)$  — усеченный кубоктаэдр;
- 4) икосаэдр  $\{3, 5\} \rightarrow (4, 6, 10) \equiv (6, 4, 10)$  — усеченный икосододекаэдр;
- 5) додекаэдр  $\{5, 3\} \rightarrow (4, 6, 10) \equiv (6, 4, 10)$  — усеченный икосододекаэдр.

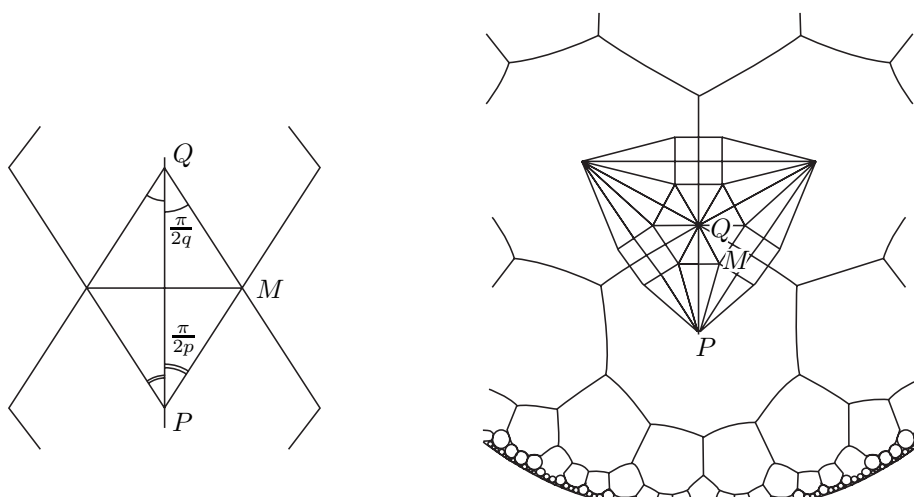


Рис. 9. К вопросу существования А-разбиений типа  $(4, 2p, 2q)$

На  $E^2$ :

- 1)  $\{3, 6\} \rightarrow (4, 6, 12)$ ;
- 2)  $\{4, 4\} \rightarrow (4, 8, 8)$  (уже было);
- 3)  $\{6, 3\} \rightarrow (4, 12, 6)$ ;

На  $\Lambda^2$ :  $\{p, q\} \rightarrow (4, 2p, 2q)$ ; при  $p = q$  эти разбиения уже встречались.

Чтобы убедиться в существовании разбиения рассматриваемого типа, достаточно соединить центр  $P$  этого  $p$ -угольника с узлом  $Q$  платонова разбиения  $\{p, q\}$  и построить углы  $\alpha = \frac{2\pi}{2p}$  и  $\beta = \frac{2\pi}{2q}$  (с вершинами в точках  $P$  и  $Q$  соответственно) так, чтобы прямая  $PQ$  была их общей биссектрисой. Тогда точки пересечения (соответствующих) сторон этих углов и дадут (две соседние) вершины как  $2p$ -угольника, так и  $2q$ -угольника (см. рис. 9).

Третий метод дает архимедовы разбиения с симплициальными узлами, в которых сходятся один квадрат и два произвольных четноугольника:  $(4, 2p, 2q)$ .

IV. Четвертый метод — усечение и вершин, и ребер (специальный случай: общее ребро  $2p$ - и  $2q$ -угольников разбиения  $(4, 2p, 2q)$  стягивается в точку). Этим методом получают следующие многогранники.

На  $S^2$ :

- 1) симплекс  $\{3, 3\} \rightarrow (4, 3, 4, 3)$  — кубооктаэдр;
- 2) октаэдр  $\{4, 3\} \rightarrow (4, 3, 4, 4) \equiv (3, 4, 4, 4)$  — ромбокубооктаэдр;
- 3) куб  $\{3, 4\} \rightarrow (4, 3, 4, 4) \equiv (3, 4, 4, 4)$  — ромбокубооктаэдр;
- 4) икосаэдр  $\{3, 5\} \rightarrow (3, 4, 5, 4) \equiv (5, 4, 3, 4)$  — ромбоикосододекаэдр;
- 5) додекаэдр  $\{5, 3\} \rightarrow (3, 4, 5, 4) \equiv (5, 4, 3, 4)$  — ромбоикосододекаэдр.

На  $E^2$ :

- 1)  $\{3, 6\} \rightarrow (3, 4, 6, 4) \equiv (6, 4, 3, 4)$ ;
- 2)  $\{6, 3\} \rightarrow (3, 4, 6, 4) \equiv (6, 4, 3, 4)$ ;
- 3)  $\{4, 4\} \rightarrow (4, 4, 4, 4) \equiv \{4, 4\}$ .

На  $\Lambda^2$ :  $\{p, q\} \rightarrow (p, 4, q, 4)$ .

На  $\Lambda^2$  четвертый метод из платонова разбиения  $\{p, q\}$  порождает архимедовы разбиения  $(p, 4, q, 4)$ ; например, из разбиения  $\{7, 3\}$  получается разбиение  $(7, 4, 3, 4)$ , а из разбиения  $\{5, 4\}$  получается разбиение  $(5, 4, 4, 4)$  (см. рис. 10).



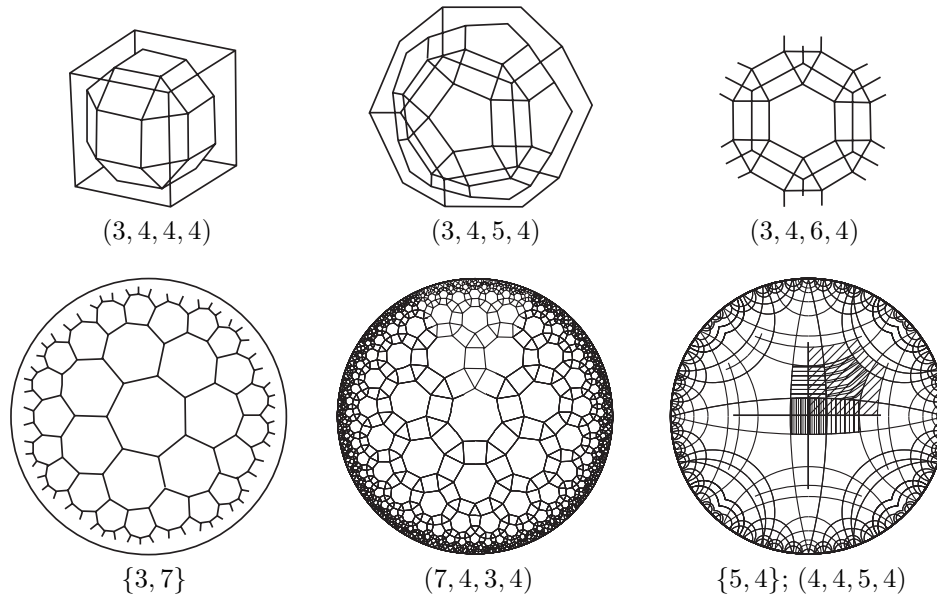


Рис. 10. А-разбиения вида  $(p, 4, q, 4)$

В узле архимедова разбиения  $(p, 4, q, 4)$  сходятся четыре грани, из которых две грани — квадраты, разделяющие две другие (произвольной четности) грани. Группа  $\Gamma$  симметрии разбиения  $\{p, q\}$  сохранилась полностью.

Существование архимедова разбиения  $(p, 4, q, 4)$ , порожденного платоновым разбиением  $\{p, q\}$ , достаточно очевидно. Внутри  $p$ -угольника соединим его центр  $P$  с узлом  $Q$  разбиения  $\{p, q\}$  (биссектрисой угла при вершине  $Q$ ) и возьмем на отрезке  $PQ$  точку  $M$ , достаточно близкую к  $Q$ . Повторим эту точку группой  $\Gamma$  симметрии разбиения  $\{p, q\}$  и рассмотрим разбиение Делоне для траектории  $\Gamma(M)$ . Мы видим, что в разбиении Делоне точка  $Q$  является центром “маленького” правильного  $q$ -угольника, для которого точка  $M$  — одна из его вершин. В то же время точка  $M$  является и вершиной “большого” правильного  $p$ -угольника с центром в точке  $P$ . Очевидно, что с увеличением отрезка  $QM$  “малый”  $q$ -угольник увеличивается, а “большой”  $p$ -угольник уменьшается (монотонно и непрерывно). Поэтому существует такое положение точки  $M$ , при котором стороны рассматриваемых многоугольников равны (а “прямоугольная” клетка разбиения Делоне, соответствующая середине ребра разбиения  $\{p, q\}$ , является квадратом).

V. Пятый метод — “скручивание” (повороты)  $p$ - и  $q$ -угольных граней разбиения  $(p, 4, q, 4)$ . Этим методом получаются следующие многогранники.

На  $S^2$ :

- 1) симплекс  $\{3, 3\} \rightarrow \{3, 5\}$  — икосаэдр;
- 2) октаэдр  $\{4, 3\} \rightarrow (3, 3, 4, 3, 3)$  — плосконосый куб;
- 3) куб  $\{3, 4\} \rightarrow (3, 3, 4, 3, 3)$  — плосконосый куб;
- 4) икосаэдр  $\{3, 5\} \rightarrow (3, 3, 5, 3, 3) \equiv (5, 3, 3, 3, 3)$  — плосконосый додекаэдр;
- 5) додекаэдр  $\{5, 3\} \rightarrow (3, 3, 5, 3, 3) \equiv (5, 3, 3, 3, 3)$  — плосконосый додекаэдр.

На  $E^2$ :

- 1)  $\{3, 6\} \rightarrow (3, 3, 6, 3, 3) \equiv (6, 3, 3, 3, 3)$ ;
- 2)  $\{6, 3\} \rightarrow (6, 3, 3, 3, 3) \equiv (3, 3, 6, 3, 3)$ .

На  $\Lambda^2$  пятый метод из платонова разбиения  $\{p, q\}$  порождает архимедовы разбиения  $(p, 3, q, 3, 3)$ ; например, из разбиения  $\{7, 3\}$  (и  $\{3, 7\}$ ) получается разбиение  $(7, 3, 3, 3, 3) \equiv (3, 3, 7, 3, 3)$

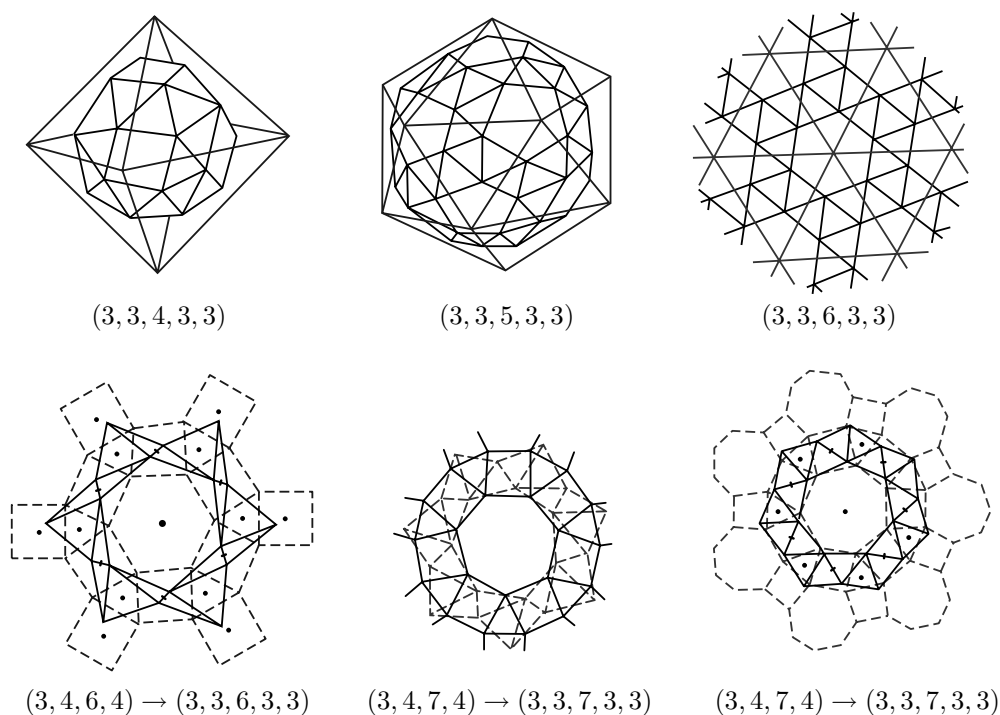


Рис. 11. А-разбиение вида  $(p, 3, q, 3, 3)$

(см. рис. 11). На рис. 11 показана перестройка разбиения  $(p, 4, q, 4)$  в разбиение  $(p, 3, q, 3, 3)$  (в нижнем ряду первый рисунок показывает, как перестраивается А-разбиение  $(3, 4, 6, 4)$  на  $E^2$  в изогональное разбиение, которое затем переходит в архимедово разбиение  $(3, 3, 6, 3, 3)$  (см. правый рисунок верхнего ряда), а два последних — стадии перестройки на  $\Lambda^2$  разбиения  $(3, 4, 7, 4)$ : сперва в изогональное разбиение, а потом в архимедово разбиение  $(3, 3, 7, 3, 3)$ , см. правый рисунок нижнего ряда).

Звезда узла пятигранная: содержит три правильных треугольника, два из которых смежны и переходят друг в друга поворотом второго порядка, третий треугольник отделен от двух указанных треугольников этой звезды при помощи  $p$ - и  $q$ -угольников (любой четности). Имеются две энантиоморфных формы (левая и правая). Этот способ показывает, что в узле могут сходиться пять нечетноугольных граней (при отсутствии четноугольных; напомним, второй способ, точнее его обобщение, позволял строить звезду с любым четным числом нечетноугольников, но только лишь двух видов).

Докажем существование указанных разбиений. Рассмотрим платонову разбиение  $\{p, q\}$ , и пусть, как и прежде, точка  $P$  — центр  $p$ -угольника,  $Q$  — узел разбиения  $\{p, q\}$ . Выше мы видели, что если в разбиении  $\{p, q\}$  мы соединим точки  $P$  и  $Q$ , возьмем на отрезке  $PQ$  точку  $M$ , то, повторив эту точку поворотами, мы получим пару правильных многоугольников ( $p$ -угольник и  $q$ -угольник) с разными длинами сторон. Мы видели, что за счет перемещения точки  $M$  вдоль прямой  $PQ$  можно добиться равенства длин этих сторон и получить разбиение  $(p, 4, q, 4)$ . Очевидно, что если мы возьмем переменную точку  $M'$  не на отрезке  $PQ$ , а на эквидистантной дуге  $P'Q'$  (с базой  $PQ$  и высотой  $MM' = h$ ), то все рассуждения можно повторить и добиться за счет выбора точки  $M'$  равенства сторон соответственных правильных многоугольников. Таким образом, мы видим, что каждому значению высоты  $h$  указанной эквидистанты соответствует единственная точка  $M'_0$ , для которой длины сторон правильных многоугольников равны. Достаточно очевидно, что геометрическое место точек  $M'_0$  есть некоторая непрерывная кривая  $L$ . Двигаясь вдоль этой кривой  $L$ , мы все время сохраняем равенство длин сторон  $p$ - и  $q$ -угольников.

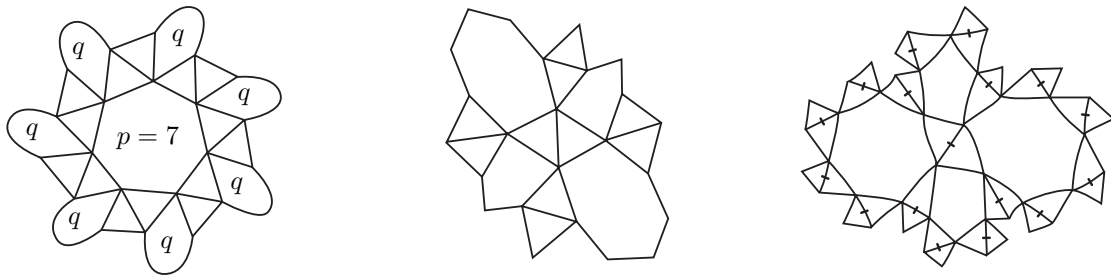


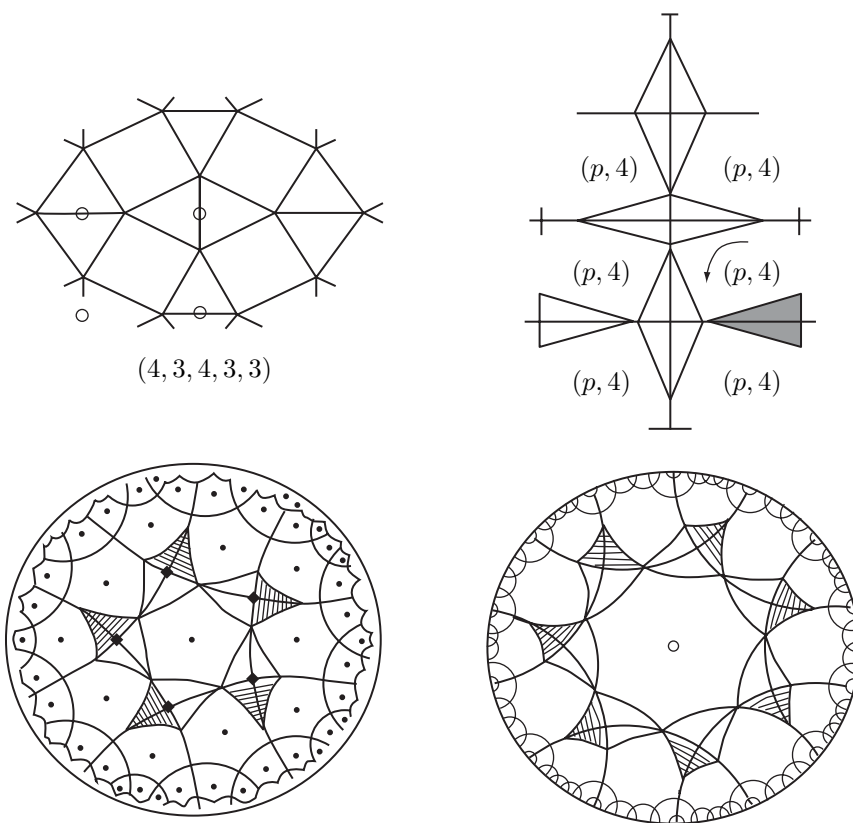
Рис. 12. Корона  $p$ -угольника и корона ромба

С другой стороны, при смещении точки  $M$  с прямой  $PQ$  прямоугольник (квадрат) архимедова разбиения Делоне  $(p, 4, q, 4)$  распадается на (перестраивается в) пару треугольников (вообще говоря, разносторонних). Но если мы двигаемся вдоль кривой  $L$ , то эти треугольники равнобедренные. Из пары равнобедренных треугольников естественным образом склеивается ромб (одна из его вершин — точка  $M$ ). Достаточно очевидно, что при повороте точки  $M$  вокруг центра  $Q$  квадрата разбиения  $(p, 4, q, 4)$  один из углов ромба можно сделать сколь угодно близким к  $\pi$ , в то время как второй угол ромба сколь угодно убывает. Следовательно, за счет перемещения вдоль линии  $L$  мы можем добиться того, чтобы равнобедренный треугольник стал равноугольным и, следовательно, равносторонним треугольником, что и приводит к разбиению  $(p, 3, q, 3, 3)$ .

Дадим другой вариант доказательства, основанный на более общих идеях, восходящих к идеям А. Пуанкаре [26], А.Д. Александрова [1] (см. также [4, 7]). Сперва покажем, пользуясь идеями работы [12], что существует звезда  $(p, 3, q, 3, 3)$ . Возьмем отрезок длины  $2a$ , построим правильный треугольник с длиной стороны  $2a$  (обозначим его угол через  $\varphi_3(a)$ ), построим правильный  $p$ -угольник (с той же длиной стороны и углом  $\varphi_p(a)$ ) и правильный  $q$ -угольник (с той же длиной стороны и углом  $\varphi_q(a)$ ). Рассмотрим сумму  $\Phi(a) = 3\varphi_3(a) + \varphi_p(a) + \varphi_q(a)$  (соответствующую схеме  $(p, 3, q, 3, 3)$ ). Очевидно, что функция  $\Phi(a)$  — монотонно убывающая функция параметра  $a$  и что при достаточно малых  $a$  ее значения больше  $2\pi$  (так как можно считать, что  $p \geq 4, q \geq 4$  и  $p \neq q$ ), а при достаточно больших — меньше  $2\pi$ . Следовательно, при некотором значении  $a = a_0$  мы получим  $\Phi(a_0) = 2\pi$  (идею метода вариации параметра, здесь употребленную, см. в [12, 13]). Если мы согласно схеме  $(p, 3, q, 3, 3)$  построим при данной точке  $S$  сперва  $p$ -угольник, за ним треугольник, после этого  $q$ -угольник и, наконец, два треугольника (все со сторонами  $2a_0$ ), то мы получим комплекс из пяти правильных многоугольников, разбивающих  $2a$ -окрестность точки  $S$  (этот комплекс и претендует на роль звезды вершины искомого разбиения).

Рассмотрим группу, порожденную поворотами порядков  $p$  и  $q$  вокруг центров соответствующих  $p$ - и  $q$ -угольников звезды и поворотом второго порядка в середине ребра, общего у двух треугольников звезды. Легко видеть, что при помощи поворота  $p$ -го порядка мы можем без противоречий построить (используя полученный комплекс-звезду) первую корону  $p$ -угольника (т.е. непроницаемую окрестность  $p$ -угольника в искомом разбиении: исходный многоугольник и все смежные с ним хотя бы по вершине многоугольники; см. рис. 12, левый комплекс). Аналогично строятся первые короны  $q$ -угольника и ромба (см. рис. 12). Как видим, звезды можно расположить относительно друг друга без противоречий (см. правый комплекс на рис. 12) и конструкция неограниченно продолжима без противоречий во всех направлениях, т.е. искомое разбиение существует.

Аккуратнее это доказывается с помощью идей указанных выше работ. Действительно, мы видим, что первая корона каждой из фигур ( $p$ -угольника,  $q$ -угольника и ромба, состоящего из двух конгруэнтных правильных помеченных поворотным центром второго порядка треугольников) строится (поворотами) без противоречий. Мы видим, что все эти три короны

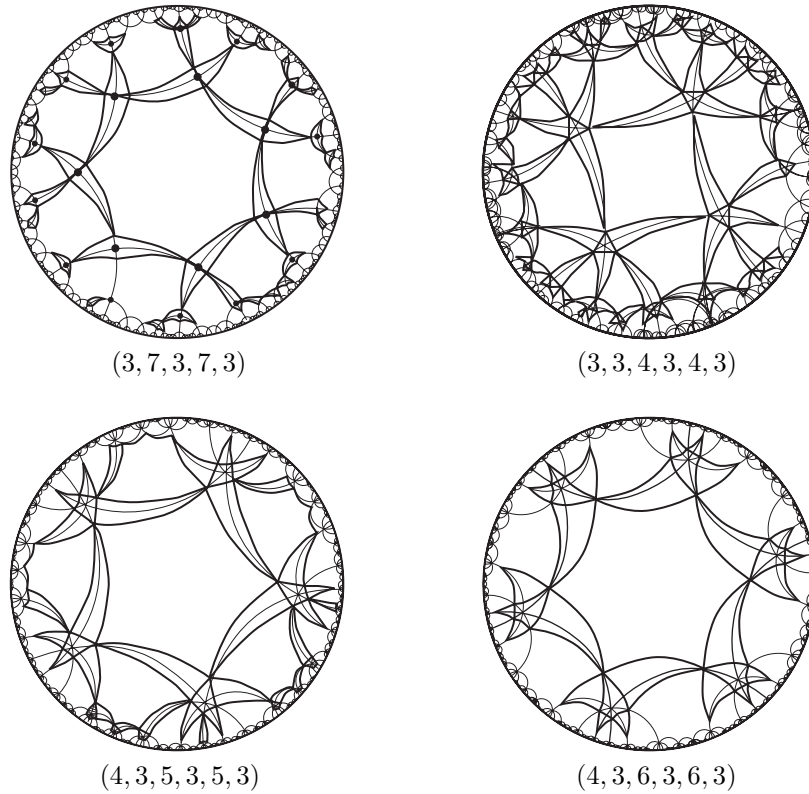
Рис. 13. А-разбиения серии  $(p, 3, p, 3, 3)$ 

совместимы в том смысле, что их можно взаимно расположить так, что

- 1) их общие части (пересечения) являются подкомплексами корон и однозначно определяют взаимное расположение каждой из корон;
- 2) после их взаимного расположения полученные парные объединения корон можно без противоречий подвергнуть действию элементов симметрии (поворотов) каждой из корон (в результате чего будут сформированы вторые короны указанных многоугольников).

Другими словами, если мы возьмем, скажем,  $p$ -угольник вместе с его первой короной, выделим какую-нибудь вершину  $W$  этого  $p$ -угольника, то увидим, что ромб (или пара соответственным образом помеченных треугольников при этой вершине) однозначно определяет расположение звезды  $q$ -угольника (и “ориентацию” ромбов этой звезды). При этом концы ребер, исходящих из вершины  $W$  и не принадлежащих  $q$ -угольнику, оказываются покрытыми или многоугольниками первой короны  $p$ -угольника, или многоугольниками первой короны ромба (короны совместимы — их можно отображать в плоскость так, чтобы они располагались без противоречий и с допущением к первому “размножению” элементами симметрии корон). Построенное объединение корон повторим поворотами  $p$ - и  $q$ -угольников и ромба (поворотами ядер корон; клетку, порождающую корону, часто называют ее *ядром*); тогда вокруг каждого из этих многоугольников-ядер формируется без противоречий (т.е. без “пустот” и пересечений) его вторая корона.

Отсутствие противоречий при продолжении этих построений и, следовательно, при получении искомого архимедова разбиения  $(p, 3, q, 3, 3)$  доказывается методом от противного с применением стандартных рассуждений. Сперва предварительно доказывается, что искомая конструкция дает покрытие плоскости: соединяют дугой кривой (отрезком) покрытую точку  $M$



**Рис. 14.** А-разбиения типа  $(q, 3, p, 3, p, 3)$ . Случай  $(3, 7, 3, 7, 3)$  соответствует  $q = 2$

и точку  $N$ , предполагаемую непокрытой. После этого, используя то, что первая обклейка любого из многоугольников имеет толщину, не меньшую чем некоторое  $\delta$ , убеждаются, что от  $M$  до  $N$  можно пройти за конечное число шагов. Затем доказывается, что полученное покрытие является разбиением: пусть на некотором шаге нарушилось построение разбиения, т.е. многоугольники пересеклись по внутренней части. Тогда, окружая эту часть плоскости замкнутым контуром и начиная стягивать контур к особой точке (внутренней дважды покрытой), получим противоречие с локальной непротиворечивостью конструкции. Здесь фактически описано, как можно получить А-разбиение с заданными поворотными центрами порядков  $p, q$  и  $2$ .

VI. Шестой метод — частный случай предыдущего при  $p = q > 4$  (и потому не нуждается в отдельном доказательстве теоремы существования). Он применим только к платоновым разбиениям  $\{p, 4\}$ . Этим методом получают следующие разбиения (см. рис. 13).

На  $S^2$  разбиения  $\{p, 4\}$ ,  $p \geq 4$ , не существует.

На  $E^2$ :  $\{4, 4\} \rightarrow (4, 3, 4, 3, 3)$ .

На  $\Lambda^2$ :  $\{p, 4\} \rightarrow (p, 3, p, 3, 3)$ .

Энантиоморфных форм нет. Метод может дать пять нечетноугольников в звезде, но три из них — треугольники, а два других конгруэнтны (примеры см. на рис. 13).

*Обобщение.* Отметим специально, что этот метод можно обобщить и в направлении, отличном от метода V. Действительно, пусть в узле  $Q$  платонова разбиения сходятся  $2q$  правильных  $p$ -угольников, т.е. мы имеем дело с платоновым разбиением  $\{p, 2q\}$ . Возьмем на одном из ребер, выходящих из  $Q$ , точку  $M$  (достаточно близкую к  $Q$ ). Размножим ее поворотом  $q$ -го порядка вокруг точки  $Q$  и возьмем выпуклую оболочку полученных  $q$  точек, образовав тем самым “малый” правильный  $q$ -угольник с центром в точке  $Q$ . Теперь точку  $M$  подвергнем поворотам вокруг центра  $p$ -угольника, на ребре которого лежит точка  $M$ . Эти  $p$  точек сформируют

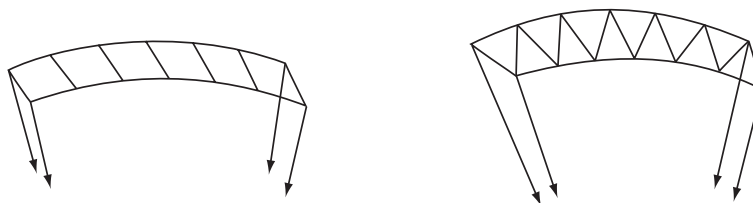
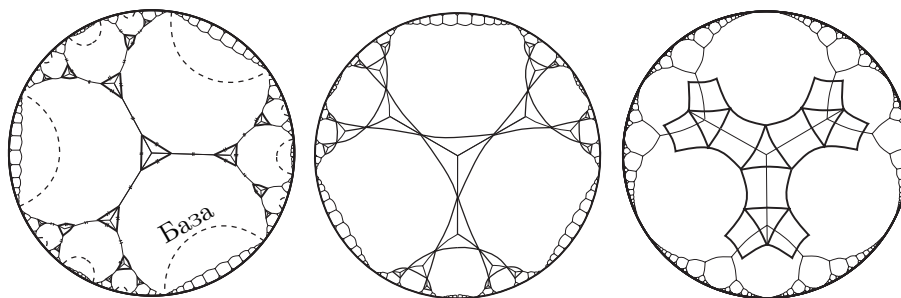


Рис. 15. Предельные призма и антипризма

Рис. 16. Фрагменты А-разбиений  $\Lambda^2$  с бесконечными клетками

“большой” правильный  $p$ -угольник (вершины которого находятся на сторонах того исходного  $p$ -угольника, вокруг центра которого мы вращали точку  $M$ ). Прделав аналогичную операцию вокруг каждой из вершин исходного платонова разбиения и в каждом его  $p$ -угольнике, мы получим разбиение, в узле которого сойдутся три треугольника, два  $p$ -угольника и один  $q$ -угольник согласно схеме  $(q, 3, p, 3, p, 3)$ . Очевидно, что треугольники равнобедренные и что их можно сделать равносторонними за счет вариации точки  $M$  (см. рис. 14). В звезде могут сходиться до шести нечетноугольников.

Отметим, наконец, своеобразные аналоги призм и антипризм с бесконечным числом конечных граней (см. рис. 15).

Здесь мы решили остановить наш обзор архимедовых разбиений плоскости Лобачевского (а следовательно, и архимедовых многогранников пространства Лобачевского  $\Lambda^3$ ). Без особого труда читатель распространит все указанные здесь конструкции и на случай эквидистантных многогранников с бесконечными (орициклическими и эквидистантными) гранями (см. рис. 16; на нем схематически показаны примеры применения некоторых из методов к платоновым разбиениям нового типа).

Описание более сложных конструкций построения архимедовых многогранников и вопрос о достаточно полном описании (классификации) таких многогранников мы решили выделить в отдельный раздел.

### 3. О КЛАССИФИКАЦИИ АРХИМЕДОВЫХ РАЗБИЕНИЙ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО $\Lambda^2$

В предыдущем разделе мы убедились, что все те методы, которые употребляются для получения архимедовых разбиений сферы  $S^2$  и евклидовой плоскости  $E^2$  путем использования платоновых разбиений этих двумерных пространств, полностью применимы и в случае плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$ . Более того, некоторые из методов допускают естественное обобщение и к тому же почти все из них применимы к новым видам правильных многогранников в  $\Lambda^3$  — многогранникам с бесконечными гранями, вписанными в орициклы или эквидистанты. Попробуем теперь взглянуть на проблему в целом: какими особенностями должен обладать комплекс (протозвезда), составленный из правильных многоугольников с общей вершиной, для того, чтобы он мог служить звездой А-разбиения  $\Lambda^2$ , и какие звезды вообще существуют

на этой плоскости? Попытаемся найти общий подход к проблеме классификации архимедовых разбиений плоскости Лобачевского.

На вторую часть первого вопроса получить ответ довольно просто.

**Теорема 1** (о существовании протозвезды). *Если нам задан набор натуральных чисел  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , где  $k > 6$ , то на  $\Lambda^2$  существует комплекс (протозвезда), состоящий из  $k$  правильных  $p_i$ -угольников,  $i = 1, 2, \dots, k$ , в котором  $p_i$ -угольники сходятся в заданной нам (циклической) последовательности (число  $k$  может быть уменьшено, если  $p_i$  достаточно велики; например, если все  $p_i \geq 7$ , то в качестве  $k$  достаточно взять число 3); указанный комплекс и претендует на роль звезды архимедова разбиения.*

**Доказательство.** Обозначим через  $\alpha_i^E$  величину угла правильного  $p_i$ -угольника евклидовой плоскости и через  $\alpha_i^\Lambda(a)$  величину угла правильного  $p_i$ -угольника плоскости Лобачевского (его величина зависит от длины  $2a$  стороны этого многоугольника). Очевидно, что величина  $\alpha_i^\Lambda(a)$  непрерывно убывает от  $\alpha_i^E$  до нуля при непрерывном возрастании  $a$  от нуля до  $+\infty$ . Так как  $k > 6$  и  $p_i \geq 3$ , то  $\sum_{i=1}^k \alpha_i^E > 2\pi$  и, следовательно,  $\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \alpha_i^\Lambda(a) > 2\pi$ . В то же время  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \alpha_i^\Lambda(a) = 0$ . Следовательно, существует такое  $a = a_0$ , что  $\sum_{i=1}^k \alpha_i^\Lambda(a_0) = 2\pi$ . Поэтому если при некоторой точке  $O \in \Lambda^2$  (как при вершине) мы построим заданные нам  $p_i$ -угольники с так выбранной длиной  $2a_0$  стороны, то мы и получим искомым комплекс (протозвезду) из таких правильных многоугольников. При этом порядок следования многоугольников вокруг вершины может быть любым (и, следовательно, в частности, многоугольники могут идти в заданной нам последовательности  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ). Так как в дальнейшем из контекста достаточно ясно, играет ли рассматриваемый комплекс роль звезды или протозвезды, то мы будем обычно приставку “прото” опускать.

Получить ответ на первый вопрос в целом (существует ли  $A$ -разбиение с заданной звездой) значительно труднее. Правда в одном частном случае ответ достаточно прост.

**Теорема 2.** *Если в звезде сошлись только четноугольные правильные многоугольники с числами сторон  $2p_1, 2p_2, \dots, 2p_k$ ,  $k > 3$ , то  $A$ -разбиение плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  с такой звездой  $(2p_1, 2p_2, \dots, 2p_k)$  существует (при этом порядок следования четноугольников в звезде можно фиксировать произвольно, а в группе симметрии архимедова многогранника имеются поворотные оси порядков  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ,  $k > 3$ , соответственно).*

**Доказательство** этого утверждения можно было бы провести обычным образом (как это делается, например, в [26]), заметив, что звезды вокруг каждого  $2p_i$ -угольника можно расположить без противоречий за счет отражений в его апофемах (существование протозвезды очевидно следует из теоремы 1). Но можно поступить проще: рассмотреть область Дирихле центра  $O$  звезды (все вершины звезды должны по предположению принадлежать траектории ее центра под действием дискретной группы  $\Gamma$ , которое транзитивно на звездах  $A$ -разбиения). Очевидно, что искомым областью Дирихле будет (описанный около окружности радиуса  $a_0$  с центром в центре  $O$  звезды)  $k$ -угольник с углами  $\frac{2\pi}{2p_1}, \frac{2\pi}{2p_2}, \dots, \frac{2\pi}{2p_k}$ , т.е. с углами  $\frac{\pi}{p_1}, \frac{\pi}{p_2}, \dots, \frac{\pi}{p_k}$ , который является многоугольником Кокстера (см. рис. 17). Кокстеровая группа, порожденная отражениями в его сторонах, и будет той дискретной группой  $\Gamma$ , которая будет (в общем случае) одностранзитивно действовать на кокстеровом разбиении и, следовательно, на звездах вершин дуального  $A$ -разбиения (более подробное описание этой конструкции, полученной весной 1965 г., читатель найдет в [12]). Как отмечал еще А.Д. Александров в [1], для того чтобы построенная (из правильных многоугольников) звезда была звездой  $A$ -разбиения, достаточно (но не необходимо), чтобы эта звезда была симметрична относительно биссектрис углов нечетноугольников, сошедшихся в звезде.

Нетрудно дать некоторые естественные обобщения конструкции, указанной в теореме 2. Если, например, в звезде участвует единственный многоугольник с нечетным числом сторон

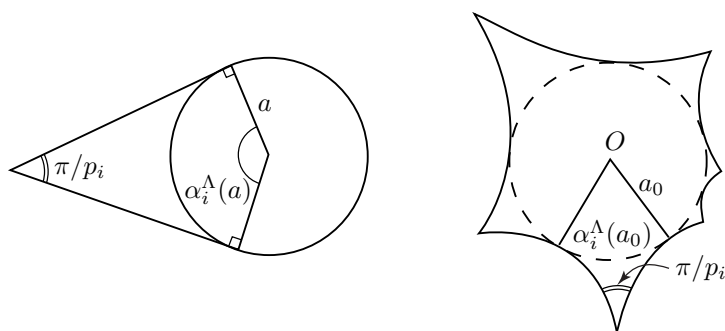


Рис. 17. Построение многоугольника Дирихле

и звезда симметрична относительно биссектрисы нечетногоугольника, проходящей через центр звезды, то соответствующее этой звезде  $A$ -разбиение плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  существует [1]. Действительно, в этом случае все биссектрисы нечетногоугольников искомого разбиения должны являться осями отражений (в каждой звезде имеется лишь один-единственный нечетногоугольник, и потому он должен быть эквивалентным рассматриваемому) и, следовательно, поворотами вокруг центра нечетногоугольника можно без противоречий расположить экземпляры рассматриваемой звезды во всех вершинах нечетногоугольника (расположить звезды без противоречий в вершинах четногоугольников можно ввиду симметрии звезды опять же за счет все тех же отражений в медианах их сторон). Отметим, что если в предыдущем случае (когда звезда составлена только из четногоугольников)  $A$ -разбиение теряло “половину” симметрии четногоугольников, входящих в построение (за счет потери отражений в биссектрисах углов), то в данном случае симметрия правильного нечетногоугольника целиком сохраняется (т.е.  $A$ -разбиение будет переходить в себя под действием любого движения, переводящего в себя любой из нечетногоугольников  $A$ -разбиения).

Можно продолжить обобщение и рассмотреть условия, накладываемые на звезду для того, чтобы в ней участвовало два нечетногоугольника или чтобы в ней участвовало два различных нечетногоугольника или несколько пар таких нечетногоугольников. Можно сформулировать еще более общее утверждение.

**Теорема 3.** *Каков бы ни был наперед заданный (конечный) набор (правильных) нечетногоугольников с числами сторон  $2p_1 + 1, 2p_2 + 1, \dots, 2p_k + 1$ , его всегда можно пополнить не более чем  $2k$  четногоугольниками так, что из полученного набора можно построить звезду  $A$ -разбиения и по ней само  $A$ -разбиение.*

Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве этого утверждения: с одной стороны, оно достаточно просто (хотя и громоздко), с другой — следует из более общего утверждения.

**Теорема 4.** *Каков бы ни был заданный набор правильных многоугольников (т.е. каковы бы ни были заданные натуральные числа  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , где  $k \geq 3$ ), он всегда может быть пополнен единственным правильным  $p$ -угольником,  $p \leq 5$ , так, что из копий многоугольников пополненного набора можно построить звезду, являющуюся звездой  $A$ -разбиения плоскости Лобачевского.*

**Доказательство.** Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что все заданные многоугольники имеют стороны одной и той же длины  $2a$ . Склеим поочередно по стороне все заданные нам многоугольники, вытянув их для простоты в линейную цепочку (последовательно используя, например, медиану в каждом из многоугольников; если бы все  $p_i$  были четными, то все центры многоугольников можно было бы расположить на одной прямой). Рассмотрим многоугольник, получающийся объединением всех многоугольников построенного комплекса (считая для простоты  $p_i \geq 4$ ). Отметим, что полученный многоугольник можно считать выпуклым и (даже) остроугольным (за счет выбора длины  $2a$  стороны  $p_i$ -угольника). Число его



сторон равно числу  $p_1 + p_2 + \dots + p_k - 2(k - 1)$ . Пусть это число сравнимо с числом  $q$  по модулю 4, т.е.  $p_1 + p_2 + \dots + p_k - 2(k - 1) = 4s + q \equiv q \pmod{4}$ ,  $q = 0, 1, 2, 3$ . Если  $q \neq 0$ , то приклеив к полученному многоугольнику еще и правильный  $p_{k+1}$ -угольник, где  $p_{k+1} = 6 - q$ , мы после этой приклейки получим многоугольник с числом сторон  $4s + q + (6 - q) - 2 = 4(s + 1)$ . Таким образом, число сторон нового многоугольника будет кратно 4. Все его стороны равны по длине (а углы можно считать острыми). Обозначив через  $\alpha_{p_i}^\Delta(a)$  величину угла  $p_i$ -угольника из нашей конструкции ( $i = 1, 2, \dots, k + 1$ ), мы видим, что, как и в предыдущих примерах, сумму  $\Phi(a) = p_1\alpha_{p_1}^\Delta(a) + p_2\alpha_{p_2}^\Delta(a) + \dots + p_k\alpha_{p_k}^\Delta(a) + p_{k+1}\alpha_{p_{k+1}}^\Delta(a)$  углов нового многоугольника можно сделать равной  $2\pi$  за счет выбора длины  $2a$  его стороны. Но каноническое отождествление (как “ручное”, так и противоположных сторон) порождает единственный цикл вершин (в смысле А. Пуанкаре [26]) и притом неособенный (т.е. сумма углов, вошедших в цикл, равна  $2\pi$  и в цикле участвуют все вершины по одному разу). Иными словами, дискретная группа  $\Gamma$ , порожденная движениями, канонически отождествляющими стороны построенного  $4(p + 1)$ -угольника, действует одностранзитивно на множестве вершин этого многоугольника. Занумеровав вершины  $4(p + 1)$ -угольника и выписав единственный (неособенный) цикл вершин, мы сможем выписать и последовательность схождения составляющих  $p_i$ -угольников,  $i = 1, \dots, k + 1$ , в вершине звезды. Замечание: если  $q = 0$ , то можно дополнительного многоугольника и не прикладывать. Взяв простой пример ( $p_1 = 7, p_2 = 3$ ), читатель убедится, что при “ручном” отождествлении получается звезда  $(7, 7, 7, 7, 7, 3, 7, 3, 7, 3)$ , а при отождествлении противоположных сторон получается звезда  $(7, 7, 7, 3, 7, 7, 7, 3, 7, 3)$ . Отметим, что при “ручном” отождествлении повороты седьмого порядка вокруг центров семиугольников теряются.

Легко заметить, что многоугольники, из которых образован  $4(p + 1)$ -угольник, можно переставлять в линейной последовательности, можно “проворачивать” их друг относительно друга, можно нарушать и линейность склейки (до определенных границ). Все это приводит, вообще говоря, к другим А-разбиениям плоскости Лобачевского (род  $p$  фуксовой группы и поверхности, соответствующих  $4p$ -угольнику, при этом сохраняется). Из приведенных примеров мы видим (см. также [20]), что более детальная классификация А-разбиений, чем по родам соответствующих поверхностей (именно этой классификации придерживался А. Пуанкаре в теории планигонов в  $\Lambda^2$ , см. [26]), скорее всего, малоцелесообразна, хотя для некоторых родов, вероятно, имеет смысл перебрать все возможные отождествления, дающие А-разбиения с заданным набором  $p_i$ -угольников, и пересмотреть все сорта Делоне таких А-разбиений. Указанным здесь способом можно получать и разбиения на правильные многоугольники, имеющие по две, три и более (различных) траекторий узлов.

Естественно возникает вопрос: пусть нам задан циклически упорядоченный набор правильных  $p_i$ -угольников,  $i = 1, \dots, k$ ; существует ли архимедово разбиение со звездой  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  и какова его группа  $\Gamma$  симметрии? Если набор неупорядоченный, то сколько таких А-разбиений? Как описать их сорта Делоне? В некоторых случаях достаточно легко получить отрицательный ответ на такой вопрос (например, если мы возьмем набор трех простых различных чисел  $(2p_1 + 1, 2p_2 + 1, 2p_3 + 1)$  и потребуем, чтобы в А-разбиении сохранились поворотные центры соответствующих порядков, то легко придем к комбинаторному противоречию уже при построении первых корон многоугольников звезды), но в общем случае ответ неясен. Если вопрос поставить более мягко (существует ли А-разбиение  $\Lambda^2$ , в символе смежности которого заданная последовательность  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  присутствует как фрагмент, т.е. в звезде вершины встречается (сильно) связный фрагмент, составленный согласно заданной последовательности), то ответ на такой вопрос достаточно прост: да, существует. Докажем это утверждение.

Возьмем набор правильных  $p_i$ -угольников (с достаточно длинной стороной  $2a$ , следовательно, с достаточно малыми углами  $\alpha_i$ ),  $i = 1, \dots, k$ , и приложим их последовательно друг к другу при общей вершине А. Полученный многоугольник “достроим” до  $4p$ -угольника (указанным выше способом) и подберем величину  $2a_0$  ребра так, чтобы сумма  $\Phi(a_0)$  была равна  $2\pi$ , т.е.

$p_1\alpha_1(a_0) + p_2\alpha_2(a_0) + \dots + p_k\alpha_k(a_0) + p_{k+1}\alpha_{k+1}(a_0) = 2\pi$ . Отметим что так как  $p_i \geq 3$ , то  $\Phi(a_0) = 2\pi > (2\alpha_{p_1} + \dots + 2\alpha_{p_{k+1}})|_{a=a_0}$ , т.е.  $\pi > (\alpha_{p_1} + \dots + \alpha_{p_k} + \alpha_{p_{k+1}})|_{a=a_0} > (\alpha_{p_1} + \dots + \alpha_{p_k})|_{a=a_0}$ , и, следовательно, построенный  $4p$ -угольник выпуклый. Согласно теореме 4 при каноническом отождествлении сторон  $4p$ -угольника мы приходим к архимедову разбиению плоскости Лобачевского, в звезде которого (однократно) встречается угол  $A$ , состоящий из последовательно углов правильных  $p_i$ -угольников, но именно этого мы и хотели достигнуть. Возвращаясь к вопросам, поставленным в начале раздела, попытаемся показать, как, используя фактически теорему о продолжении [7] и предшествующие ей идеи А. Пуанкаре, изложенные в работе [26], можно в конкретной ситуации ответить на вопросы о существовании и единственности архимедова разбиения с наперед заданной звездой.

Пусть нам задан комплекс  $S$ , состоящий из правильных многоугольников ( $p_1$ -,  $p_2$ -, ...,  $p_k$ -угольников) плоскости Лобачевского, имеющих (единственную) общую вершину  $Q$  (и циклически расположенных вокруг этой точки, т.е.  $i$ -й многоугольник смежен ровно по одной стороне лишь с предшествующим  $(i-1)$ -м и последующим  $(i+1)$ -м многоугольниками), и пусть сумма углов (этих многоугольников), сошедшихся в точке  $Q$ , равна  $2\pi$ . Говоря проще, этот (метрический) комплекс можно считать лежащим на плоскости Лобачевского и составленным правильными многоугольниками (в циклическом порядке расположенными вокруг точки  $Q$ ), образующими разбиение  $2a$ -окрестности точки  $Q$  ( $2a$  — длина стороны). Именно так должна выглядеть звезда вершины искомого архимедова разбиения. Как и в теореме о продолжении [4, 7], мы должны выяснить вопрос о том, можно ли звезду  $S$  продолжить до  $A$ -разбиения.

Согласно условию метрика и топология звезды таковы, что эту звезду  $S$  можно изометрично отобразить (обозначим это отображение через  $g'$ ) на плоскость Лобачевского  $\Lambda^2$  так, что центр  $Q$  звезды отобразится в любую наперед заданную точку  $Q'$  плоскости Лобачевского (обозначим образ точки  $Q$  при отображении  $g'$  через  $Q'$ , т.е.  $Q' = g'(Q)$ ). При этом  $2a$ -окрестность точки  $Q'$  оказывается разбитой образами многоугольников звезды. Пусть  $[Q'Q'']$  — одно из ребер комплекса  $g'(S)$ , и пусть по этому ребру смежны правильные многоугольники:  $p'_j$ -угольник и  $p'_{j+1}$ -угольник (образы  $p_j$ - и  $p_{j+1}$ -угольников при отображении  $g'$ ). Произведем теперь (другое) отображение  $\tilde{g}$  звезды  $S$  на  $\Lambda^2$  такое, которое отобразит центр  $Q$  в точку  $Q''$ . После этого образ  $\tilde{g}(S)$  подвергнем повороту  $v$  (может быть, тождественному) вокруг точки  $\tilde{g}(Q) = Q''$ , который совместит  $\tilde{p}_j$ -угольник с  $p'_j$ -угольником; здесь через  $\tilde{p}_j$ -угольник обозначен образ  $p_j$ -угольника при отображении  $\tilde{g}$ .

Условимся для удобства  $p_j$ -угольник называть многоугольником  $P_j$ .

Если после поворота  $v$  многоугольника  $\tilde{g}(P_{j+1})$  его образ, т.е. многоугольник  $v[\tilde{g}(P_{j+1})]$ , совпал с многоугольником  $P'_{j+1}$ , то мы обозначим отображение  $v \circ \tilde{g}$  через  $g''$  и будем говорить, что отображения  $g'$  и  $g''$  согласованно отображают звезду  $S$  на плоскость  $\Lambda^2$  или, иными словами, что в вершинах  $Q'$  и  $Q''$  звезды  $S' = g'(S)$  и  $S'' = g''(S)$  расположены согласованно (точнее, стандартно (зеркально) согласованно). Если же многоугольник  $v[\tilde{g}(P_{j+1})] = P''_{j+1}$  окажется смежным с многоугольником  $P''_j$  не по стороне  $Q'Q''$  (а по стороне  $Q''Q''''$  — второй из сторон многоугольника  $P''_j$ , проходящей через точку  $Q''$ ), то произведем дополнительное отражение  $m$  в биссектрисе угла  $Q''$  многоугольника  $P''_j$ , после чего многоугольник  $m\{v[\tilde{g}(P_{j+1})]\}$  совместится с многоугольником  $P'_{j+1}$  (см. рис. 18). В этом случае обозначим через  $g''$  произведение  $m \circ v \circ \tilde{g}$  и будем говорить, что звезды  $g'(S)$  и  $g''(S)$  (стандартно) согласованы (вдоль ребра  $Q'Q''$ ).

Если среди многоугольников  $P_1, P_2, \dots, P_{j-1}, P_{j+2}, \dots, P_k$  имеется пара  $P_{j'}, P_{j'+1}$  такая, что  $P_{j'} = P_j$  и  $P_{j'+1} = P_{j+1}$  (или в обратном порядке  $P_{j'} = P_{j+1}$ ,  $P_{j'+1} = P_j$ ), то совершенно очевидно, каким образом по отображению  $g'$  подобрать отображение  $g''_1$  так, чтобы эти отображения  $g'$  и  $g''_1$  оказались согласованными или, что то же самое, оказались согласованными звезды  $g'(S)$  и  $g''_1(S)$  (хотя это согласование по определению не является стандартным). Очевидно,

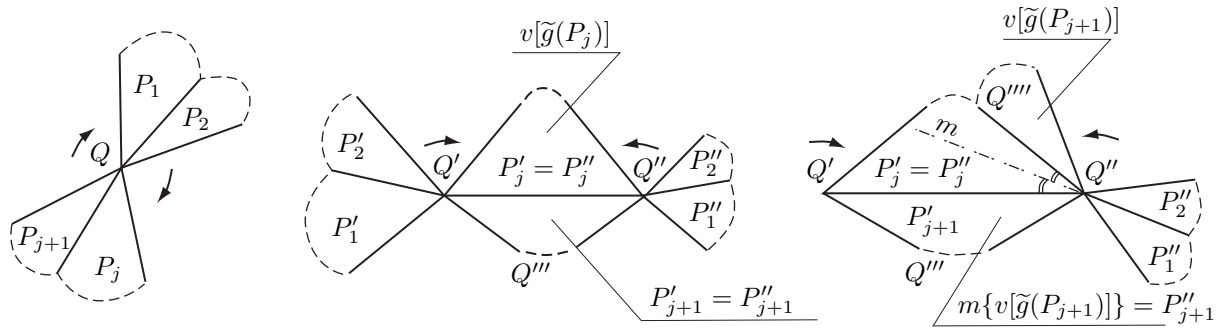


Рис. 18. Стандартное согласование корон на концах ребра

что в этом случае мы могли бы в звезде  $g'(S)$  в качестве используемого ребра взять ребро, по которому смежны образы  $g'(P_j)$  и  $g'(P_{j+1})$ , но это будет лишь малосущественной модернизацией построения архимедова разбиения. Немного более серьезной будет и модернизация конструкции в случае, если один из вновь рассмотренных многоугольников окажется совпадающим с каким-то из многоугольников  $P_j$  и  $P_{j+1}$ .

Иными словами, две звезды  $S' = g'(S)$  и  $S'' = g''(S)$  с общим ребром считаются согласованными вдоль этого общего ребра (изометричные отображения  $g'$  и  $g''$  считаются согласованными), если нашлись в звезде  $S$  две пары таких последовательных (смежных по ребру) многоугольников  $P_j, P_{j+1}$  и  $P_{j'}, P_{j'+1}$ , что отображения  $g'$  и  $g''$  отображают общие ребра пар в общее ребро звезд, а образы  $g'(P_j \cup P_{j+1})$  и  $g''(P_{j'} \cup P_{j'+1})$  совпадают.

Итак, в стандартном (зеркальном) случае согласование означает возможность так взаимно расположить звезды на  $\Lambda^2$ , что одна из звезд получается из второй простым отражением в серединном перпендикуляре общего ребра (в нестандартном случае этого обычно не наблюдается). Отсчет в звездах начинается с общего ребра и ведется в согласованных направлениях: если в одной звезде против часовой стрелки, то в другой — по часовой стрелке; при этом запись символа звезды оказывается одинаковой в обеих звездах. В нестандартном случае (когда имеются несколько конгруэнтных пар) нам придется сделать дополнительный доворот (возможно, с отражением).

Возьмем теперь какой-нибудь многоугольник  $P_j$  звезды  $S$ , его образ  $P'_j = g'(P_j)$ , выберем на нем обход его контура (скажем, в направлении от  $Q'$  к  $Q''$ ). Мы видели, что в конце  $Q''$  ребра  $Q'Q''$  всегда можно расположить согласованно ту же звезду, что и в вершине  $Q'$  (всегда можно, например, устроить зеркальное согласование). В конце  $Q'''$  ребра  $Q''Q'''$  многоугольника  $P'_j$  снова можно согласованно расположить звезду, конгруэнтную заданной (хотя бы опять же за счет зеркального согласования), и т.д. Если после  $p_j$  шагов в последней вершине окажется звезда, согласованная с первой (на этом пути, т.е. в точке  $Q'$ ) звездой, то мы будем говорить, что  $p_j$ -угольник звезды  $S$  обладает согласованной первой короной.

Если  $p_i$  — число четное, то, как мы видели, последовательные отражения в медианах четногоугольника позволяют (канонически) согласованно расположить звезду во всех вершинах этого четногоугольника. Если же все многоугольники рассматриваемой звезды — четногоугольники, то вокруг каждого из многоугольников звезды можно построить первую корону, что означает возможность согласованного построения второй короны для каждого из многоугольников и т.д. (см. выше).

В более общем случае, когда в звезде имеются и нечетногоугольные многоугольники или когда звезда допускает различные согласования в смежных вершинах, придется рассматривать возможность построения для данного  $p_i$ -угольника различных корон и проверять для каждого вида корон возможность ее согласования с допустимыми коронами остальных многоугольников данной звезды.

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ А-РАЗБИЕНИЙ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУКСОВЫХ ГРУПП I СЕМЕЙСТВА РОДА $p = 2$

Чтобы убедить читателя в практической ценности предложенного подхода получения архимедовых многогранников, авторы проделали соответствующие выкладки для случая  $p = 2$ .

Рассмотрим более детально вехи этого пути и дадим перечень некоторых из полученных нами звезд архимедовых многогранников. Мы ограничимся рассмотрением лишь двух канонических (“ручного” и “противоположного”) типов отождествления сторон восьмиугольника.

1. В теореме 4 мы строили нужный нам  $4p$ -угольник из заданного набора правильных многоугольников. Идя в обратном направлении, мы должны считать, что нужный нам  $4p$ -угольник (восьмиугольник) с нужными свойствами уже имеется. Тогда естественно возникает вопрос: каким образом он составлен из правильных многоугольников (или, что то же самое, каким образом поверхность рода  $p$  с метрикой, локально являющейся метрикой Лобачевского, разбита на правильные многоугольники)? Если не пользоваться симметрией поверхности, т.е. если использовать лишь фуксову группу, порожденную (каноническим) отождествлением сторон (при этом  $4p$ -угольник — фундаментальная область группы), то ясно, что все вершины всех правильных многоугольников, составляющих  $4p$ -угольник, должны совпадать с единственной (с точностью до эквивалентности) точкой  $4p$ -угольника (фуксова группа должна действовать однотранзитивно на узлах А-разбиения). Наиболее простой способ найти такое разбиение  $4p$ -угольника (восьмиугольника) — считать, что вершины правильных многоугольников, составляющих  $4p$ -угольник, располагаются в вершинах этого  $4p$ -угольника: при обоих канонических отождествлениях вершины  $4p$ -угольника эквивалентны относительно фуксовой группы (иными словами, принадлежат одному и тому же циклу в смысле А. Пуанкаре [26]). Таким образом, на первом шаге нашего алгоритма стоит задача перебрать все способы, какими можно разрезать восьмиугольник на многоугольники (таким образом, чтобы линии разрезов не пересекались во внутренних точках восьмиугольника). Этим мы получим комбинаторную схему склейки правильных многоугольников в восьмиугольник.

2. На втором шаге мы должны убедиться в метрической реализуемости полученной комбинаторной схемы, т.е. в том, что восьмиугольник, полученный склейкой правильных многоугольников согласно той или иной схеме (разрезов), при соответствующем подборе длины его стороны (согласно конструкции все его стороны равны) является выпуклым многоугольником, сумма углов которого равна  $2\pi$ . Из теоремы 4 очевидно, что эта проверка не столь трудна, хотя технически вычисление всех метрических параметров — дело трудоемкое (и потому разумно эти вычисления отодвинуть в конец).

3. Используя структуру схождения углов восьмиугольника (структуру цикла Пуанкаре), соответствующую рассматриваемой схеме отождествления его сторон (“противоположной” или “ручной”), мы эту схему накладываем на схему разрезов восьмиугольника (на составные правильные многоугольники) и тем самым получаем структуру звезды соответствующего (данному отождествлению сторон восьмиугольника и данной его схеме разрезов) архимедова разбиения плоскости Лобачевского.

4. Пересмотрев все схемы разрезов восьмиугольника для каждого из типов отождествления (“противоположного” или “ручного”), мы выпишем все типы звезд предполагаемых А-разбиений (типы А-звезд). При этом еще придется учитывать и тот факт, что одна и та же схема разрезов восьмиугольника может привести к разным А-звездам: строение звезды А-разбиения может зависеть не только от схемы разрезов и от схемы отождествления сторон восьмиугольника, но и от их взаимного расположения. Более того, даже если А-звезды, полученные при различных начальных условиях (различные разрезы, различные склейки), оказались метрически одинаковыми, из этого еще не следует, что и А-разбиения метрически одинаковы (нужно дополнительное исследование).

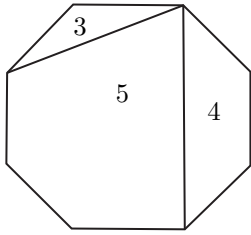


Рис. 19. Схема разреза

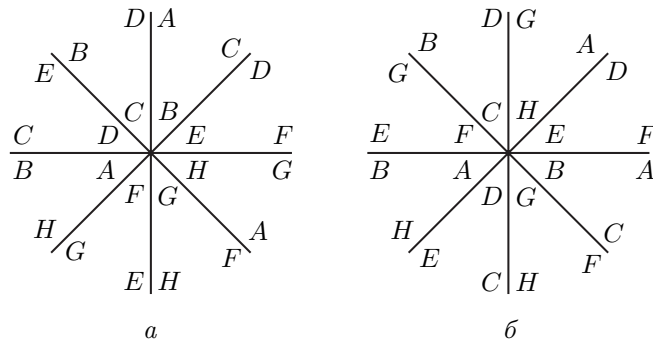


Рис. 20. Схемы циклов: *a* — “ручное” отождествление; *b* — “противоположное”

5. Убедившись в отсутствии (комбинаторных) противоречий, которые, казалось бы, могли возникнуть при построении корон многоугольников, участвующих в звезде (теоретически таких противоречий не должно быть, что следует из теории фуксовых групп А. Пуанкаре: восьмиугольник — фундаментальная область соответствующей фуксовой группы и при этом у группы имеется лишь один-единственный цикл и притом тривиальный), нам придется перейти к подсчетам метрических параметров правильных многоугольников.

Из полученного списка А-звезд мы для каждой из звезд составим систему уравнений для нахождения углов правильных многоугольников (в нее входящих) и длины их общей стороны. К сожалению, в большинстве случаев приходится искать приближенное (с достаточной точностью) решение. Это, впрочем, не должно нас слишком смущать: на карте Бельтрами–Клейна или на карте Пуанкаре (внутри круга) мы с трудом сможем откладывать углы точнее, чем с точностью в  $0.2^\circ$ , даже взяв достаточно большой радиус окружности абсолюта (мы чертили А-звезды в интерпретации А. Пуанкаре с радиусом абсолюта в 200 мм).

6. Используя метрические особенности карт Бельтрами–Клейна и Пуанкаре (внутри круга) и их взаимосвязь, мы попытались дать изображение соответствующей звезды. Результаты вычислений и построений показали, что изобразить корону (хотя бы для одного многоугольника) даже в случае простейшей звезды и даже в случае интерпретации Пуанкаре практически невозможно, и мы ограничились лишь изображением звезды (и, возможно, схематическим изображением нескольких первых корон).

И так, следуя намеченному плану, мы сперва составили схемы всевозможных разрезов восьмиугольника (эти схемы представлены на рисунках, помещать которые здесь мы не решились из соображений экономии места; мы при этом пользовались обычным “ручным” перебором и потому, возможно, что-то и пропустили). Все дальнейшее построение мы проиллюстрируем на примере разбиения восьмиугольника на треугольник, пятиугольник и четырехугольник (см. схему на рис. 19). Имея схему разрезов, мы должны ее наложить на схему схождения углов восьмиугольника, соответствующую рассматриваемому отождествлению сторон (см. рис. 20; схему схождения углов мы легко получаем, воспользовавшись алгоритмом А. Пуанкаре для составления цикла). Выберем для простоты иллюстрации цикл, соответствующий противоположному отождествлению сторон восьмиугольника  $ABCDEFGH$  (это отождествление одно из наиболее симметричных). Наложим теперь на схему цикла Пуанкаре (рис. 20, *b*) схему разрезов восьмиугольника (см. рис. 19).

Мы увидим, что угол  $A$  восьмиугольника разрезан двумя диагоналями так, что правильные многоугольники в этой вершине следуют в порядке (треугольник, пятиугольник, квадрат) (если мы будем внутри угла  $A$  “поворачиваться” от стороны  $BA$  к стороне  $HA$ ), что мы и укажем на схеме. Далее, переходя к соседнему углу  $EDC$  схемы Пуанкаре, мы видим, что этот угол полностью занят углом  $D$  пятиугольника; следующий угол  $HGF$  схемы — это угол  $G$

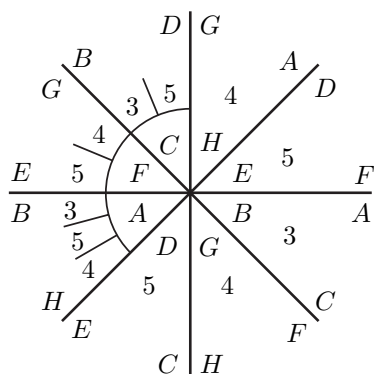


Рис. 21. Наложение схем

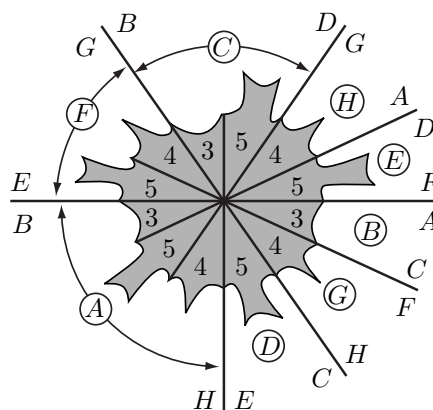


Рис. 22. Схема А-звезды

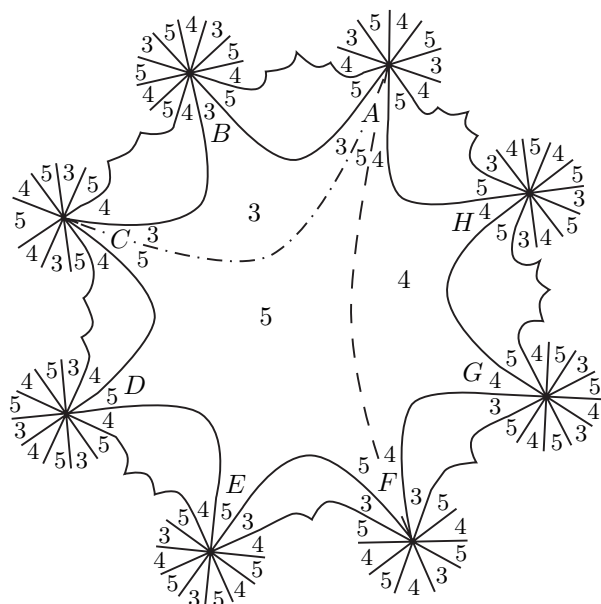


Рис. 23. Схема короны восьмиугольника

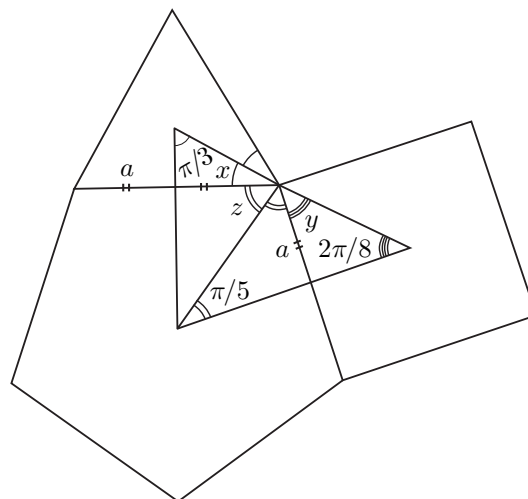


Рис. 24. Вычисление метрических параметров

четырехугольника; следующий угол  $CBA$  — это угол  $B$  треугольника; следующий угол  $FED$  — это угол  $E$  пятиугольника; следующий угол  $AHG$  — это угол  $H$  четырехугольника; следующий угол  $DCB$  разрезан диагональю на два угла: пятиугольника и треугольника; наконец угол  $GFE$  разрезан диагональю на два угла: квадрата и пятиугольника (см. рис. 21). Таким образом, это приводит нас к следующей структуре звезды:  $(3, 5, 4, 5, 4, 3, 5, 4, 5, 3, 4, 5)$ , схематически изображенной на рис. 22.

Чтобы убедиться в отсутствии комбинаторных противоречий (хотя мы и знаем теоретически, что их не должно быть), построим первую корону восьмиугольника. Для этого достаточно либо разнести построенную звезду с помощью схемы отождествления сторон восьмиугольника (и убедиться в отсутствии комбинаторных противоречий в соседних вершинах), либо расположить в каждой вершине восьмиугольника схему звезды в соответствии с наименованием угла восьмиугольника (и проверить, что полученное расположение соответствует выбранной схеме отождествления сторон восьмиугольника).

Мы видим (рис. 23), что во всех вершинах восьмиугольника схемы А-звезд располагаются без противоречий (согласованно) и что корона восьмиугольника сформирована из (первых)

корон треугольника, пятиугольника и квадрата (т.е. отсутствие противоречий в короне 4p-угольника влечет отсутствие противоречий и в первых коронах тех правильных многоугольников, из которых составлен восьмиугольник, т.е. согласованность корон этих многоугольников). Это позволяет стандартными методами убедиться в существовании соответствующего A-разбиения (сперва за счет “толщины” короны убеждаемся, что искомая конструкция есть покрытие плоскости, а потом методом “стягивания” и “выдувания” убеждаемся, что многоугольники покрытия не могут пересекаться по внутренним точкам).

Исходя из ранее рассмотренных соображений (см. теорему 4) мы знаем, что рассматриваемая комбинаторная схема должна реализоваться метрически. Чтобы явно в этом убедиться, необходимо просчитать все метрические параметры (длину стороны, углы многоугольников и т.д.).

Обозначив длину стороны через  $2a$ , величину угла треугольника через  $2x$ , четырехугольника через  $2y$ , пятиугольника через  $2z$  и находя длину (половины) стороны из соответствующих прямоугольных треугольников (см. рис. 24), мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin x} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin y} = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin z}, \\ 3 \cdot 2x + 4 \cdot 2y + 5 \cdot 2z = 2\pi. \end{cases}$$

Решая (приближенно) эту систему, мы находим

$$2x = 21.353^\circ, \quad 2y = 30.376^\circ, \quad 2z = 34.886^\circ$$

(аналогичную систему приходится решать и в общем случае).

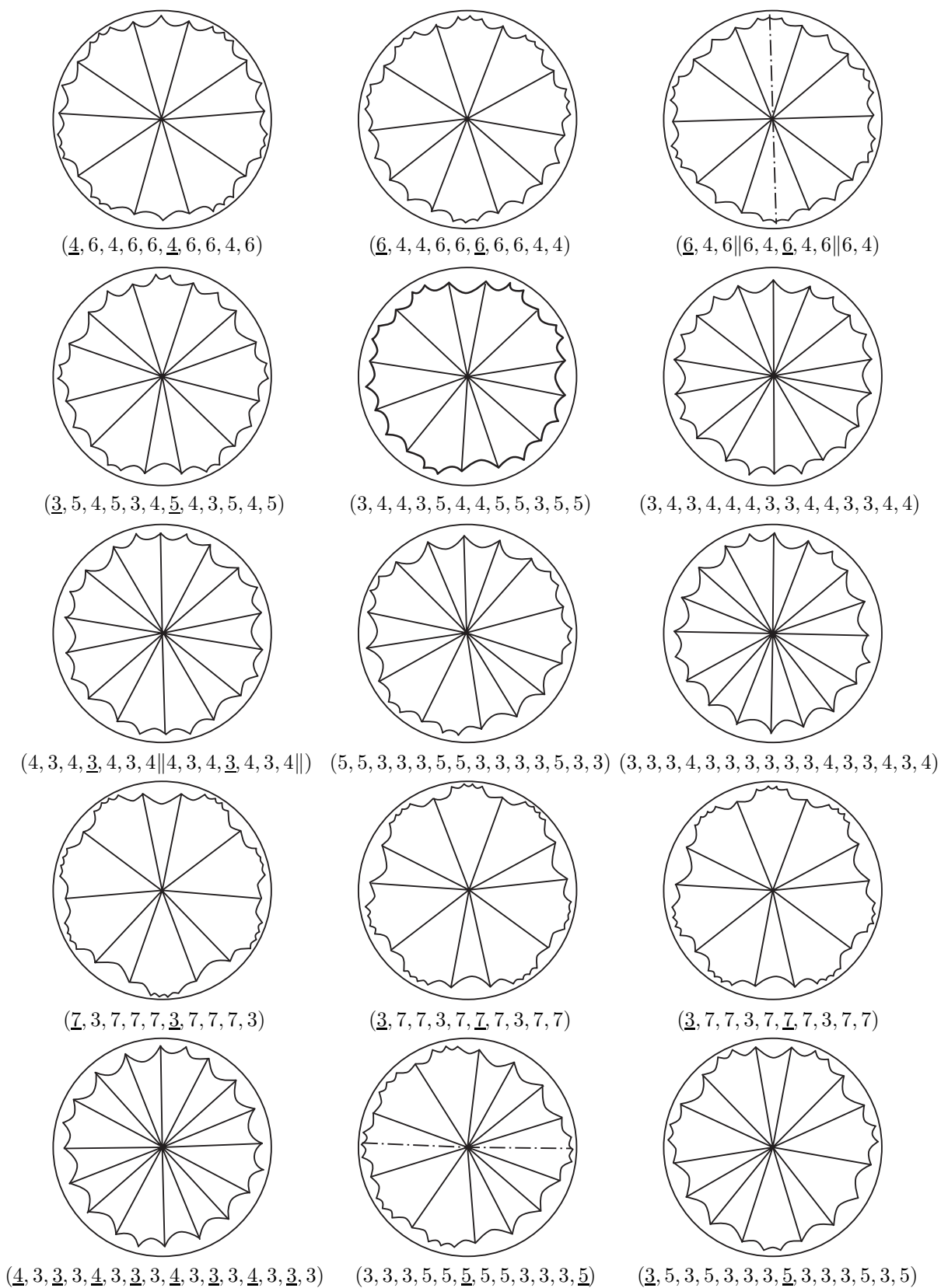
Если мы поместим центр звезды в центр абсолюта интерпретации Бельтрами–Клейна, то мы сможем найти евклидову длину  $(2a)_e$  стороны  $2a$ , используя известную формулу  $\rho_e = \operatorname{th} \frac{\rho}{k}$  [21, с. 172], где  $\rho_e$  — евклидова длина полярного радиуса точки в интерпретации Бельтрами–Клейна, а  $\rho$  — его гиперболическая длина. Если мы хотим иметь изображение звезды в (конформной) модели Пуанкаре (внутри круга того же радиуса), то придется еще воспользоваться связью между величинами (длинами) полярных радиусов в этих интерпретациях:  $\rho_{\text{ВК}} = \frac{2\rho_{\text{Р}}}{1+\rho_{\text{Р}}^2}$  (см. [21, с. 167]),  $\rho_{\text{ВК}}$  — евклидова величина полярного радиуса точки в интерпретации Бельтрами–Клейна, а  $\rho_{\text{Р}}$  — евклидова величина полярного радиуса точки в интерпретации Пуанкаре.

В рассматриваемом нами примере мы получаем для стороны  $2a$  (центр звезды в центре интерпретации; стороны, проходящие через центр звезды, изображаются отрезками прямых в обеих интерпретациях; углы между этими сторонами по величине равны евклидовым углам) величины  $(2a)_e = (2a)_{\text{ВК}} = 0.9973$ ,  $(2a)_{\text{Р}} = 0.9288$ .

Для построения квадрата и пятиугольника приходится дополнительно вычислять (используя тригонометрию треугольника плоскости Лобачевского и указанную выше связь интерпретаций) полярные координаты остальных вершин (не лежащих на сторонах, проходящих через центр интерпретаций).

Если в звезде A-разбиения сходятся только два типа правильных многоугольников, то вычисление несколько упрощается, как, например, в случае, когда восьмиугольник составлен из двух треугольников и одного шестиугольника. Но и в этом случае, как показывают вычисления, построить в интерпретации (Пуанкаре или тем более Бельтрами–Клейна) даже первую корону восьмиугольника практически невозможно. Посему мы и ограничиваемся здесь лишь изображением звезды A-разбиения в интерпретации Пуанкаре (внутри круга).

По предварительным подсчетам случай  $p = 2$  дает порядка 100 различных звезд A-разбиений (некоторые из которых участвуют в различных схемах отождествления сторон). Если при этом учитывать и нетривиальные циклы Пуанкаре (т.е. те, где сумма углов равна  $\frac{2\pi}{k}$ ,  $k \geq 2$ ,



**Рис. 25.** Схемы некоторых А-звезд (род  $p = 2$ ); символ  $\parallel$  показывает, что между двумя многоугольниками звезды проходит ось симметрии, а подчеркивание символа  $k$ -угольника означает, что через центр звезды и центр этого многоугольника проходит ось симметрии звезды



$k$  натуральное), то мы получаем соответствующее количество счетных серий  $A$ -разбиений  $\Lambda^2$ . На рис. 25 приведены некоторые из полученных звезд (изображение опять же в интерпретации Пуанкаре).

Мы показали, как можно получать  $A$ -разбиения и архимедовы многогранники, соответствующие двум классам федоровских групп плоскости Лобачевского: классу кокстеровых групп и классу, составляющему первое семейство фуксовых групп (по классификации А. Пуанкаре [26]). Было бы естественно рассмотреть полный перечень всех двумерных федоровских групп плоскости Лобачевского и изучить возможность использования методов, аналогичных рассмотренным, в каждом классе таких групп, но это задача для дальнейших исследований.

Предлагая положить в основу классификации архимедовых многогранников тот же принцип классификации по родам, который предложил А. Пуанкаре для классификации фуксовых групп, мы руководствовались тем, что во всякой федоровской группе плоскости Лобачевского имеется подгруппа конечного индекса, состоящая только из сдвигов (аналог теоремы Шенфлиса–Бибераха евклидовой кристаллографии, см. [2]). Возможно, что более конструктивным была бы классификация по федоровским группам плоскости Лобачевского (действующим на множестве звезд  $A$ -разбиения). Но при этом встают весьма нетривиальные задачи: описание (классификация) федоровских групп плоскости Лобачевского, их табулирование, разработка символики этих групп, исследование групп симметрии двумерных гиперболических многообразий, соответствующих подгруппам без кручения федоровских групп. В том, что это все имеет достаточные основания для дальнейшего исследования, читатель легко убедится, рассмотрев архимедовы разбиения, получаемые из платонова разбиения  $\{4p, 4p\}$  “классическими” методами. Но все же необходимость более дробной классификации  $A$ -разбиений плоскости Лобачевского нам кажется дискуссионной.

## 5. ПРАВИЛЬНОГРАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ В $\Lambda^3$

Все изложенное выше оказывает непосредственное влияние на теорию правильногранных многогранников пространства Лобачевского, которой мы и коснемся ниже (более подробно см. в [17]). Отметим возросший в последние годы интерес к правильногранным многогранникам.

В [8] было показано, что в  $E^3$ , кроме призм и антипризм, существуют только 92 выпуклых правильногранных многогранника, из которых 28 простых, из которых в свою очередь лишь восемь ( $M_8, M_{20}, \dots, M_{25}, M_{28}$ ) существенно новых, т.е. отличных от многогранников указанных выше классов или от частей таких многогранников.

Напомним, что правильногранный многогранник называется простым, если его нельзя разрезать плоскостями (по ребрам) на несколько правильногранных многогранников (и составным в противном случае).

В пространстве Лобачевского  $\Lambda^3$ , кроме указанных выше правильногранных многогранников, имеются по крайней мере еще две счетные серии простых выпуклых правильногранных многогранников (пирамиды и купола, терминология из [8]) и несчетное количество составных, отсутствующих в  $E^3$  (возможными единичными существенно новыми многогранниками мы здесь заниматься не будем).

Действительно, убедимся, что в пространстве Лобачевского  $\Lambda^3$  правильные  $k$ -угольные пирамиды (и бипирамиды) существуют при любом  $k \geq 3$  (в  $E^3$  они существуют лишь при  $k = 3, 4, 5$ ). Для этого возьмем в  $\Lambda^3$  правильный эквидистантный многогранник  $\{3, k\}$ , получаемый из разбиения плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  на правильные треугольники, сходящиеся по  $k$ ,  $k \geq 7$ , в вершине: очевидно, что  $k$ -угольная пирамида получается как выпуклая оболочка вершин треугольных граней, сошедшихся при одной какой-нибудь его вершине (т.е. как выпуклая оболочка вершин треугольных граней, образующих звезду вершины правильного эквидистантного многогранника  $\{3, k\}$ ). Достаточно очевидно, что линейный угол двугранного угла при

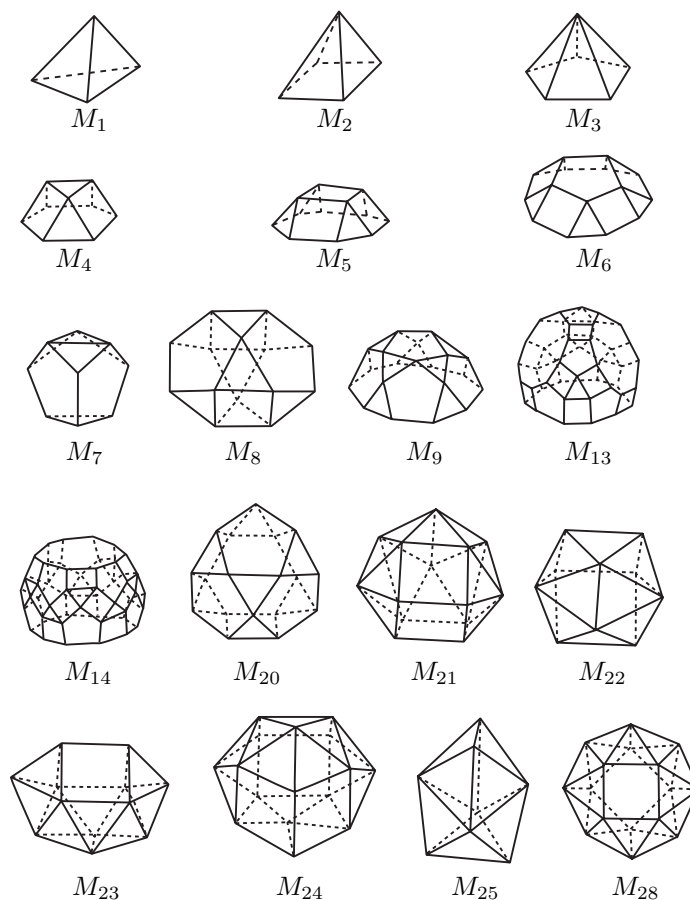


Рис. 26. Примеры простых правильных многогранников евклидова пространства  $E^3$

ребре основания пирамиды можно сделать сколь угодно малым. Последнее обстоятельство открывает неограниченные возможности прикладывания таких пирамид к правильным  $k$ -угольным граням других правильных многогранников. Складывая, в частности, по основанию две такие пирамиды, мы получаем правильную бипирамиду. Используя аналогичные соображения, легко показать и существование бесконечной последовательности куполов (многогранники  $M_4, M_5, M_6$  из списка В.А. Залгаллера, см. [8] и рис. 26). Достаточно рассмотреть счетную серию архимедовых эквидистантных многогранников  $(p, 4, q, 4)$ , построенных в разд. 2 (четвертый метод), положить здесь  $q = 3$  и рассмотреть выпуклую оболочку короны  $p$ -угольной грани архимедова многогранника  $(p, 4, 3, 4)$  (т.е. выпуклую оболочку объединения  $p$ -угольной грани со всеми смежными с ней хотя бы по вершине гранями). Здесь также достаточно очевидно, что угол при ребре нижнего основания можно считать достаточно острым (и потому такие купола можно наряду с пирамидами прикладывать к другим правильным многогранникам). Отметим здесь же, что, отсекая пирамиду или купол от соответствующего эквидистантного многогранника, мы получаем новые (эквидистантные) правильные выпуклые многогранники. Используя такие отсечения (или прикладывания), мы легко можем показать несчетность множества таких многогранников.

Напомним, что еще фактически Т. Госсет указал на возможность получения многогранников с правильными гранями путем последовательного прикладывания кубов друг к другу. А. Рислинг отметил (не опубликовано) строгую выпуклость получаемых при этом в пространстве Лобачевского  $\Lambda^3$  правильных многогранников. Достаточно очевидно, что аналогичная конструкция (так сказать, “столбчатого” многогранника) может быть получена при помощи любой  $k$ -угольной правильной призмы. Прикладывая друг к другу основаниями

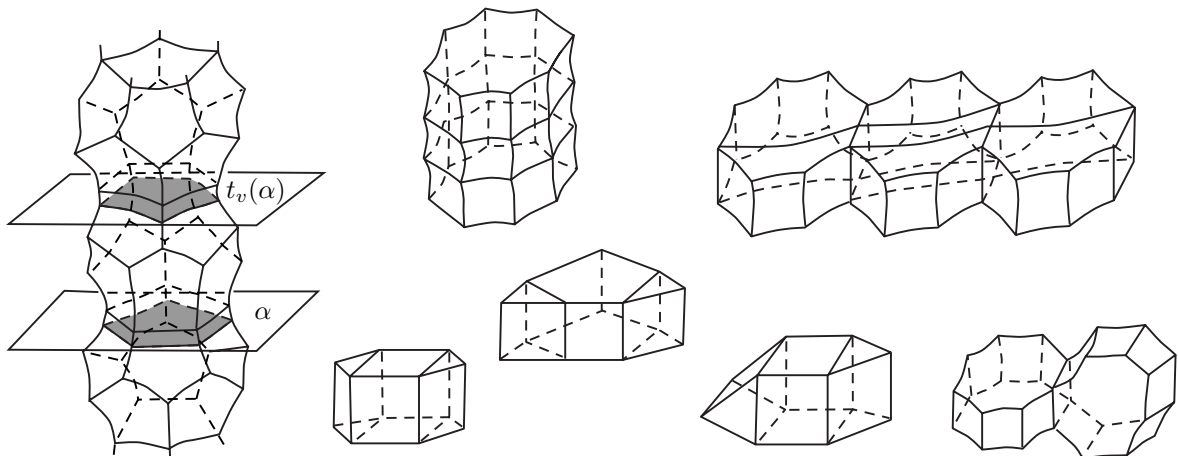


Рис. 27. Примеры правильных многогранников пространства Лобачевского  $\Lambda^3$

призмы  $\Pi_k$ , мы получаем (двугранный угол  $\beta_k$  между основанием  $k$ -угольной призмы и его квадратной боковой гранью в пространстве Лобачевского всегда острый) бесконечную двухпараметрическую серию выпуклых правильных многогранников  $\Pi_{kl}$  пространства Лобачевского  $\Lambda^3$ , не существующих в  $E^3$ . Далее правильные многогранники такого типа мы будем называть прямолинейными призматическими. Аналогичные конструкции получаются из додекаэдров, икосаэдров или антипризм. Отметим, что и из куполов можно строить пирамидоподобные выпуклые правильные многогранники.

Почти столь же очевидно, что при достаточно больших размерах призм любую  $k$ -угольную правильную призму  $\Pi_k$  можно приложить по квадратной грани к любой  $p$ -угольной правильной призме  $\Pi_p$  (здесь и далее выражение “можно приложить” означает, что после прикладывания мы получаем новый выпуклый правильный многогранник). При этом мы можем две призмы прикладывать друг к другу по квадратным граням двумя различными способами (см. рис. 27):

- 1) так, чтобы их главные оси скрещивались под прямым углом;
- 2) так, чтобы эти оси были ортогональны одной и той же плоскости (главной плоскости симметрии призмы).

В отличие от случая куба мы здесь уже можем формировать самые различные цепочки из таких призм (более подробно об использовании буферных многогранников см. [17]).

Отметим теперь, что, кроме различных линейных серий правильных многогранников (прямолинейные, “плоские” и “пространственные” цепочки призм), в  $\Lambda^3$  существуют и разнообразные “ветвящиеся” серии правильных многогранников. Одна из таких простейших разветвленных серий получается из архимедова усеченного тетраэдра. Как показывает непосредственный подсчет, к треугольной грани усеченного тетраэдра можно приложить правильную треугольную призму. К ней по свободной треугольной грани снова можно приложить такую же призму и т.д. Таким образом, двигаясь вдоль четырех тройных осей архимедова усеченного тетраэдра, мы можем приложить к нему различные прямолинейные правильные многогранники  $\Pi_{3m_1}$ ,  $\Pi_{3m_2}$ ,  $\Pi_{3m_3}$  и  $\Pi_{3m_4}$ , составленные из  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$  правильных треугольных призм соответственно. К свободным треугольным граням так полученного правильного многогранника можно вновь приложить по архимедову усеченному тетраэдру, к каждому из которых в свою очередь можно приложить по три новых прямолинейных призматических правильных многогранника и т.д. Отметим, что аналогичные конструкции можно получать, отправляясь практически от любого архимедова многогранника. Вообще говоря, как показывают непосредственные подсчеты предельных двугранных углов

архимедовых и платоновых многогранников, в одном и том же правильногранном многограннике можно соединить (используя метод буферных многогранников) центры “разветвления”, соответствующие любым точечным группам. Таким образом, мы сможем соединить в одном правильногранном многограннике любые наперед заданные архимедовы многогранники. Заметим, что так как в “разветвленных” многогранниках участвуют прямолинейные призматические многогранники и так как любые два прямолинейных призматических многогранника можно склеивать, то и разветвленные многогранники также, вообще говоря, можно склеивать.

Используя ортогональные усечения идеальных вершин и склейку получающихся усеченных многогранников (многоугольников), мы можем получать правильные, архимедовы и правильногранные многогранники, вообще не имеющие вершин [9, 11]. Использование правильных многогранников с бесконечными правильными гранями и применение к ним методов получения архимедовых многогранников, описанных в разд. 2, дают не только бесконечные серии архимедовых многогранников, но и бесконечные серии новых правильногранных многогранников (хотя бы за счет прикладывания правильногранных пирамидальных и купольных шапочек). (Ради осторожности следует отметить, что ввиду особенностей метрики пространства Лобачевского некоторые простые правильногранные многогранники при подходящем выборе метрических параметров могут оказаться распадающимися, т.е. составными.)

Для определения возможностей прикладывания друг к другу правильногранных многогранников следовало бы вычислить все двугранные углы соответственных предельных многогранников (т.е. многогранников, все вершины которых суть бесконечно удаленные точки). Для архимедовых (конечных и орисферических) многогранников соответствующие углы были просчитаны А. Пахомий [18].

В завершение темы рискнем предложить читателю своеобразное применение теоремы 1 (о протозвезде) в задаче построения правильногранных многогранников. “Подняв” (спроектировав) построенный в процессе доказательства комплекс (протозвезду) на пару эквидистантных поверхностей, симметрично расположенных относительно общей базовой плоскости (плоскости разбиения), и взяв выпуклую оболочку вершин полученной конструкции, мы получим некоторый выпуклый многогранник  $M$ . Плоскость исходного разбиения будет плоскостью симметрии многогранника  $M$ . “Сверху” и “снизу” он будет ограничен образами протозвезды, состоящими из правильных многоугольников. “Боковые” грани образуют замкнутую зону, составленную из “прямоугольников”. Абсолютно очевидно, что за счет выбора высоты эквидистантных поверхностей “прямоугольники” можно превратить в квадраты. Сам многогранник  $M$  при этом превратится в правильногранный многогранник  $M_0$  с квадратными “боковыми” гранями. Очевидно, что аналогичные правильногранные многогранники с зонами из квадратных граней (склеенных из призм) можно получать из линзовых (в смысле [13]) архимедовых многогранников в неограниченном количестве.

За счет подклейки четырехгранных пирамид или призм (с использованием двоичных дробей; см., например, [14]) с помощью бесконечного прямолинейного правильногранного многогранника  $P_{k\infty}$  доказывается несчетность класса правильногранных многогранников такого типа. В [15] читатель может найти сведения и о правильногранных многогранниках пространства Лобачевского в размерности больше чем 3.

Специального внимания, видимо, заслуживают и кельвиновские разбиения и соответствующие им многогранники [19], ибо они дают соответствующие правильногранные многогранники не только в размерности 3, но и в размерностях 4 и 5 (и притом несчетное множество таких многогранников).

В качестве выводов можно отметить, что описание класса правильногранных многогранников трехмерного пространства Лобачевского, видимо, естественно базировать на классификации архимедовых многогранников этого пространства и перечислении принципов (методов) получения составных многогранников из несоставных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д. О заполнении пространства многогранниками // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика. Физика. Химия. 1954. № 2. С. 33–43.
2. Гуцул И.С., Макаров В.С. Об одном свойстве федоровских групп пространства Лобачевского // Тр. МИАН. 1978. Т. 148. С. 106–108.
3. Делоне Б.Н. Теория планигонов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 3. С. 365–385.
4. Делоне Б.Н., Долбиллин Н.П., Штогрин М.И., Галлулин Р.В. Локальный критерий правильности систем точек // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 1. С. 19–21.
5. Делоне Б.Н., Долбиллин Н.П., Штогрин М.И. Комбинаторная и метрическая теория планигонов // Тр. МИАН. 1978. Т. 148. С. 109–140.
6. Делоне Б.Н., Галлулин Р.В., Штогрин М.И. Современная теория правильных разбиений евклидова пространства // Федоров Е.С. Правильное деление плоскости и пространства. Л.: Наука, 1979. С. 235–260. (Классики науки).
7. Долбиллин Н.П. О локальных свойствах дискретных правильных систем // ДАН СССР. 1976. Т. 230, № 3. С. 516–519.
8. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями. Л.: Наука, 1967. (Зап. науч. сем. ЛОМИ; Т. 2).
9. Заморзаев А.М. О правильных многосторонниках и многогранниках в пространстве Лобачевского // Учен. зап. Кишинев. гос. ун-та. 1959. Т. 39. С. 195–207.
10. Каган В.Ф. Основания геометрии: Учение об основании геометрии в ходе его исторического развития. М.; Л.: Гостехиздат, 1949, 1956. Ч. 1, 2.
11. Макаров В.С. Полуправильные многоугольники и многосторонники на плоскостях Эвклида и Лобачевского // Учен. зап. Кишинев. гос. ун-та. 1960. Т. 54. С. 101–116.
12. Макаров В.С. Об одном классе двумерных федоровских групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 3. С. 531–542.
13. Макаров В.С. Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского // Проблемы геометрии. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 15. С. 3–59. (Итоги науки и техники).
14. Макаров В.С. О правильных многогранниках в пространстве Лобачевского // Изв. АН Респ. Молдова. 1992. № 2. С. 3–6.
15. Макаров В.С., Макаров П.В. О выпуклых многогранниках с правильными гранями в пространстве Лобачевского // Дискретная математика и ее приложения: Матер. VIII Междунар. сем. М.: Изд. мех.-мат. фак. МГУ, 2004. С. 402–405.
16. Макаров В.С., Макаров П.В. Правильные разбиения пространств постоянной кривизны и их кристаллографические группы // Математические исследования в кристаллографии, минералогии и петрографии: Тр. II Всерос. науч. шк., Апатиты, 16–17 окт. 2006. Апатиты: К & М, 2006. С. 19–32.
17. Макаров В.С., Макаров П.В. Правильные многогранники трехмерного пространства Лобачевского // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников: Тр. Междунар. конф., посв. 100-летию Н.В. Ефимова, Москва, 18–21 авг. 2010. М.: МАКС Пресс (в печати).
18. Макаров В.С., Пахомий А.П. О многогранниках с правильными гранями в пространстве Лобачевского // VI Тирасп. симпоз. по общей топологии и ее приложениям. Кишинев: Штиинца, 1991. С. 159–160.
19. Макаров П.В. О кельвиновских разбиениях трехмерного пространства Лобачевского правильными многогранниками // УМН. 1990. Т. 45, № 1. С. 179–180.
20. Макаров П.В. К вопросу о классификации А-разбиений плоскости Лобачевского // Математические исследования в естественных науках: Тр. V Всерос. науч. шк., Апатиты, 12–14 окт. 2009. Апатиты: К & М, 2009. С. 34–43.
21. Смогоржевський О.С. Основи геометрії. Київ: Радянська школа, 1954.
22. Фейеш Том Л. Расположения на плоскости, сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958.
23. Boole Stott A. Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings // Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam. 1910. Sect. 1, dl. 11, N 1.
24. Coxeter H.S.M. Regular honeycombs in hyperbolic space // Proc. Intern. Congr. Math., Amsterdam, 1954. Amsterdam: North-Holland, 1956. V. 3. P. 155–169.
25. Fejes Tóth L. Regular figures. Oxford: Pergamon Press, 1964.
26. Poincaré H. Théorie des groupes fuchsien // Acta math. 1882. V. 1. P. 1–62.