

**В.А.Рябов, В.В.Максименко, В.П.Иванов, Л.Ю.Куприянов,
С.Ю.Крылов, Л.Н.Прокофьев, Р.С.Хафизов**

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МЕХАНИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Москва 2013

Рецензенты:

Калашников Н.П., доктор физико-математических наук, профессор МИФИ
Загайнов В.А., доктор физико-математических наук, профессор МГИУ.

Физический практикум. Лабораторные работы по механике и молекулярной физике. Учебное пособие для вузов/ В.А.Рябов, В.В.Максименко, В.П.Иванов, Л.Ю.Куприянов, С.Ю.Крылов, Л.Н.Прокофьев, Р.С.Хафизов.

Учебное пособие содержит описание лабораторных работ по механике и молекулярной физике. В каждой работе имеется теоретическая часть, описание экспериментальной установки и методики проведения измерений. Большое внимание уделено методам анализа экспериментальных данных и оценке погрешностей измерений.

Пособие предназначено для инженерно-технических специальностей вузов.

Содержание

Предисловие	4
Основы обработки результатов эксперимента	5
1. Введение	5
2. Оценка погрешности прямых измерений.....	5
3. Оценка погрешности косвенных измерений.....	8
4. Графическое представление экспериментальных данных	11
5. Проведение кривых через экспериментальные точки	13
6. Компьютерная обработка результатов измерений.....	16
7. Общие методические рекомендации	20
1. МЕХАНИКА	22
1.1. Изучение законов вращательного движения на маятнике Обербека.....	22
1.2. Изучение движения маятника Максвелла и определение его момента инерции.....	28
1.3. Исследование прецессии свободного гироскопа	33
1.4. Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний	41
1.5. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника	47
1.6. Определение коэффициента трения качения с помощью наклонного маятника	53
2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	59
2.1. Определение показателя адиабаты методом Клемана–Дезорма	59
2.2. Определение показателя адиабаты по скорости звука в газе	64
2.3. Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса.....	69
Приложения	74

Предисловие

Лабораторные работы, наряду с лекциями и практическими занятиями, являются важнейшей составляющей учебного процесса по физике. Цель лабораторного практикума – дать возможность студенту самостоятельно воспроизвести физические явления, научить его обращению с измерительными приборами и познакомить с методами измерений. Не менее важным является привитие навыков ведения лабораторного журнала, построения графиков, оценки погрешностей измерений и анализа экспериментальных данных.

В начале учебного пособия излагаются сведения о погрешностях измерений, их оценке, записи и обработке результатов опытов. Особое внимание уделено построению графиков и методам анализа экспериментальных данных. Использование компьютеров позволяет значительно уменьшить трудоемкость аналитических методов обработки результатов измерений. В пособии рассматривается один из вариантов компьютерной обработки данных с использованием пакета Mathcad. Даны также общие методические рекомендации, которым необходимо следовать при прохождении лабораторного практикума. Изложенный материал должен изучаться перед началом работы в лаборатории, а также повторяться и закрепляться в процессе выполнения лабораторных работ. Для более углубленного изучения ряда затронутых вопросов можно рекомендовать книгу Дж. Тейлора «Введение в теорию ошибок» - М.: Мир, 1985.

Описания лабораторных работ начинаются с теоретических введений. Они призваны дать ясное представление о существе изучаемых явлений. После теоретических введений приводятся описания экспериментальных установок и методов измерений, а затем задания, регламентирующие последовательность действий при проведении измерений. В конце описаний даны контрольные вопросы к защите лабораторных работ.

Основы обработки результатов эксперимента

1. Введение

В основе физики, как экспериментальной науки, лежат измерения. *Измерением называется операция сравнения измеряемой величины с некоторой величиной, принятой за единицу.* В результате измерения мы получаем число, показывающее, сколько единиц содержится в измеряемой величине. Само это число зависит от выбора единицы измерения и поэтому без ее указания не имеет никакого смысла.

Полученные в результате измерений значения различных величин могут зависеть друг от друга. Физика устанавливает связь между такими величинами и выражает ее в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

Различают *прямые* и *косвенные* измерения. Прямые измерения производятся с помощью приборов, которые непосредственно определяют саму измеряемую величину. Так, длину можно измерить линейкой, а время – секундомером. В косвенных измерениях значение физической величины является результатом расчета, в котором используются значения других физических величин, полученных в результате прямых измерений. Так, например, плотность тела может быть вычислена по его массе и объему, скорость – по величине пути, пройденного за известное время, и т.д.

Измерения никогда не бывают абсолютно точными из-за многочисленных погрешностей, возникающих в процессе их проведения. Поэтому **в задачу измерений входит не только нахождение числового значения измеряемой величины, но также и оценка допущенной при измерении погрешности.** Ниже мы обсудим типы погрешностей, приведем формулы для их оценки, а также рассмотрим методы обработки экспериментальных данных, в том числе с применением компьютерных технологий.

2. Оценка погрешности прямых измерений

Анализируя возможные погрешности измерений, следует, прежде всего, упомянуть о *грубых погрешностях (промахах)*, возникающих вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. Такие погрешности происходят, если, например, экспериментатор неправильно прочтет номер деления на шкале прибора, или если в электрической цепи произойдет замыкание, или вследствие других подобных причин. Полностью избежать грубых погрешностей невозможно. Поэтому, если установлено (или есть веские подозрения), что они имели место, соответствующие результаты измерений следует исключить из рассмотрения.

Остающиеся неизбежные погрешности эксперимента делятся на две существенно разные группы: *случайные* и *систематические*. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что их результаты не в точности равны друг другу, а "разбросаны" вблизи некоторого среднего значения. *Погрешности, меняющие величину и знак от опыта к опыту, называются случайными*. Случайные погрешности обязаны своим происхождением неконтролируемым причинам, действие которых неодинаково в каждом опыте и не может быть учтено.

В качестве примера рассмотрим результаты измерений диаметра проволоки в различных местах, полученные при помощи микрометра:

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7
диаметр (мм)	0.36	0.36	0.35	0.34	0.36	0.34	0.35

Различие в значениях диаметра обусловлено тем, что проволока не может иметь форму идеально круглого цилиндра (из-за случайных причин, возникающих при ее изготовлении). Что делать с полученными цифрами? Как найти из них достаточно близкое к наиболее вероятному значение диаметра и как оценить погрешность полученного результата? Этот вопрос подробно изучается в математической статистике. Мы здесь изложим соответствующие правила без вывода.

В качестве наилучшего значения для измеренной физической величины x принимают среднее арифметическое из всех полученных результатов:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

В нашем случае для диаметра проволоки получим

$$\bar{d} = \frac{1}{7}(0,36 + 0,36 + 0,35 + 0,34 + 0,36 + 0,34 + 0,35) = 0,3514 \text{ мм}$$

Этому результату приписывается случайная погрешность, определяемая формулой

$$\delta x^{(сл)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

В нашем случае

$$\delta d^{(сл)} = \sqrt{\frac{(0,36 - 0,3514)^2 + \dots + (0,35 - 0,3514)^2}{7(7-1)}} = 0,0034 \text{ мм.}$$

Оценка (2) подобрана так, что при проведении большого числа серий измерений погрешность в 68% случаев оказывается меньше $\delta x^{(сл)}$, а в 32% случаев больше. Иначе говоря, если бы мы провели не одну серию из 7

измерений диаметра проволоки, а десять таких серий, то мы могли бы ожидать, что в шести или семи из них усредненный результат будет отличаться от истинного значения меньше чем на 0,0034 мм, а в остальных случаях больше чем на 0,0034 мм. Погрешность, определенную с достоверностью 68%, называют *стандартной* или *среднеквадратичной погрешностью*, а ее квадрат – *дисперсией*. Можно показать, что, как правило, погрешность измерений только в 5% случаев превосходит $2\delta x^{(cl)}$ и почти всегда оказывается меньше $3\delta x^{(cl)}$. Следует отметить, что формула (2) позволяет достаточно хорошо оценивать величину стандартной погрешности в тех случаях, когда число измерений не меньше 5. При меньшем числе измерений применяются другие, более сложные оценки.

Анализируя формулу (2), можно прийти к выводу, что с увеличением числа измерений n случайная погрешность уменьшается как $1/\sqrt{n}$, т.е. обратно пропорционально корню квадратному из числа измерений. Таким образом, случайную погрешность можно сделать сколь угодно малой, увеличивая число измерений. По этой причине, в хорошем эксперименте измерения повторяют достаточно большое число раз. Однако, точность результата отнюдь не сводится только к случайной погрешности, так как всегда имеют место еще и систематические погрешности. *Систематические погрешности связаны с несовершенством методики эксперимента, а также с погрешностями измерительных приборов. Систематические погрешности сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Их невозможно устранить путем увеличения числа измерений, ибо они заложены в методике или в самом приборе и будут повторяться. Оценку систематической погрешности $\delta x^{(suctm)}$ экспериментатор проводит, анализируя особенности методики эксперимента, паспортную точность прибора, цену деления его шкалы. В дальнейшем, в качестве систематической погрешности $\delta x^{(suctm)}$ мы будем брать приборную погрешность, которая, как правило (у достаточно простых приборов), равна половине цены деления измерительной шкалы. В рассматриваемом примере с проволокой цена деления шкалы микрометра $\Delta = 0,01$ мм. Следовательно,*

$$\delta d^{(suctm)} = \frac{\Delta}{2} = 0,005 \text{ мм}$$

Полная погрешность δx измеряемой величины x определяется совокупностью случайной $\delta x^{(cl)}$ и систематической $\delta x^{(suctm)}$ погрешностей. Если их просто сложить, мы получим разумную оценку полной погрешности, но это будет все же переоценка. Действительно, если возможное отклонение от истины связано с двумя или более независимыми причинами, то эти причины могут приводить к отклонениям не только в одну, но и в противоположные стороны. Наиболее вероятная полная погрешность будет меньше, чем просто сумма отдельных независимых погрешностей. Более реальной оценкой полной погрешности является так называемое

математическое ожидание, равное геометрической сумме случайной и систематической погрешностей:

$$\delta x = \sqrt{[\delta x^{(сл)}]^2 + [\delta x^{(сист)}]^2}. \quad (3)$$

В нашем случае с проволочкой имеем:

$$\delta d = \sqrt{(0.0034)^2 + (0.005)^2} = 0.0060 \text{ мм.}$$

Как записать окончательный результат измерений? Найденное среднее значение \bar{x} является лишь неким приближением к истинному значению x и может отличаться от него с вероятностью 68% на величину не превосходящую погрешность δx . Другими словами, истинное значение x лежит где-то в интервале от $(\bar{x} - \delta x)$ до $(\bar{x} + \delta x)$. Это и есть окончательный результат, который принято для краткости записывать символически как $x = \bar{x} \pm \delta x$. (4)

При этом результаты вычислений \bar{x} и δx должны быть округлены. Необходимость округлений диктуется здравым смыслом. Действительно, определение погрешности, по каким бы сложным формулам она не вычислялась, является лишь нашей оценкой того, что может произойти в эксперименте. Поэтому удержание многих значащих цифр в погрешности δx было бы делом совершенно бессмысленным. Напомним, что значащими являются все цифры, за исключением тех нулей, перед которыми нет других значащих цифр. В случае высокоточных измерений в погрешности могут быть указаны две значащие цифры, но для измерений в учебной лаборатории погрешность должна округляться до одной значащей цифры. После этого числовое значение величины \bar{x} надо округлить до того десятичного разряда, которым оканчивается погрешность. С учетом этих правил, в нашем примере с измерением диаметра проволоки мы должны записать

$$d = 0,351 \pm 0,006 \text{ мм.}$$

3. Оценка погрешности косвенных измерений

Очень часто интересующая нас физическая величина x не измеряется непосредственно, а вычисляется по определенным формулам через величины найденные из прямых измерений. Как найти погрешность δx величины x в таких случаях? Начнем с простейшего случая, когда x является функцией одной переменной a

$$x = f(a),$$

причем величина a найдена в результате прямых измерений с определенной погрешностью, т.е. нам известны \bar{a} и δa :

$$a = \bar{a} \pm \delta a.$$

Ясно, что в качестве наилучшего значения для x надо взять

$$\bar{x} = f(\bar{a}), \quad (5)$$

однако этот результат будет лишь неким приближением к истине из-за неточности в знании исходной величины a . Результат мы должны записать в стандартном виде

$$x = \bar{x} \pm \delta x,$$

предварительно вычислив погрешность δx . Очевидно, что погрешность δx будет тем больше, чем больше δa ; кроме того, δa может зависеть от вида функциональной зависимости $x = f(a)$. По определению производной, приращение функции dx соответствующее приращению ее аргумента da записывается как

$$dx = \frac{df}{da} da.$$

Заменяя произвольное приращение da на погрешность δa , получаем формулу для вычисления погрешности δx :

$$\delta x = \left| \frac{df}{da} \right| \cdot \delta a, \quad (6)$$

где значение производной надо брать по модулю при $a = \bar{a}$.

Для примера рассмотрим три функции:

$$x_1 = ka, \quad x_2 = ka^2 \quad \text{и} \quad x_3 = k\sqrt{a},$$

где k некоторая константа. В соответствии с (6) получаем:

$$\delta x_1 = k\delta a, \quad \delta x_2 = 2k\bar{a}\delta a \quad \text{и} \quad \delta x_3 = \frac{k\delta a}{2\sqrt{\bar{a}}},$$

или, переходя к относительным погрешностям,

$$\frac{\delta x_1}{\bar{x}_1} = \frac{\delta a}{\bar{a}}, \quad \frac{\delta x_2}{\bar{x}_2} = \frac{2\delta a}{\bar{a}} \quad \text{и} \quad \frac{\delta x_3}{\bar{x}_3} = \frac{\delta a}{2\bar{a}}.$$

Мы видим, что умножение на константу не влияет на относительную погрешность, возведение в квадрат увеличивает относительную погрешность в два раза, а извлечение квадратного корня, наоборот, уменьшает относительную погрешность в два раза. Таким образом, вид функции $x = f(a)$ оказывает определенное влияние на величину погрешности, что и учитывается коэффициентом (производной) в общей формуле (6).

Рассмотрим теперь случай, когда x является функцией двух переменных. a и b

$$x = f(a, b),$$

причем величины a и b найдены в результате прямых измерений,

$$a = \bar{a} \pm \delta a, \quad b = \bar{b} \pm \delta b.$$

В качестве наилучшего значения для x естественно принять

$$\bar{x} = f(\bar{a}, \bar{b}). \quad (7)$$

Как нам теперь определить погрешность δx ? Очевидно, что δx будет тем больше, чем больше и δa и δb ; кроме того, результат будет зависеть от вида функциональной зависимости $x = f(a, b)$. Полный дифференциал функции

$x = f(a, b)$, определяющий приращение dx этой функции, соответствующее приращениям da и db ее аргументов записывается как

$$dx = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db.$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial a}$ и $\frac{\partial f}{\partial b}$ – частные производные функции f по переменным a и b ,

соответственно. Частные производные вычисляются по тем же правилам, что и обычные. При вычислении частной производной по одной из переменных другая переменная просто считается константой. К примеру, если

$f(a, b) = a^2 + b^2$, то $\frac{\partial f}{\partial a} = 2a$, а $\frac{\partial f}{\partial b} = 2b$. Заменяя произвольные приращения

аргументов da и db на погрешности в определении величин a и b , мы, очевидно, получим разумную оценку для погрешности искомой величины x :

$$\delta x \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot \delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot \delta b.$$

Сумма в правой части этого выражения дает максимально возможную погрешность величины x , соответствующую максимальным отклонениям измеренных величин a и b от их истинных значений, приводящим к отклонению величины x от ее истинного значения в одну и ту же сторону. Поскольку a и b независимы, возникновение такого максимального отклонения отнюдь не обязательно. Как мы уже отмечали выше, в такой ситуации наиболее вероятный результат (математическое ожидание) определяется геометрической суммой вкладов, соответствующих независимым величинам:

$$\delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \delta b^2}. \quad (8)$$

Обратите внимание на то, что значения производных в (8) берутся при $a = \bar{a}$ и $b = \bar{b}$.

Общая формула (8) позволяет определить погрешность вычисляемой величины x для любой функциональной зависимости $x = f(a, b)$. Для часто встречающихся на практике простых функций, формулы для вычисления погрешностей заметно упрощаются, если интересоваться не абсолютной δx , а относительной погрешностью $\frac{\delta x}{\bar{x}}$. Приведем несколько примеров:

$$x = a \pm b \quad \rightarrow \quad \delta x = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2}; \quad (8a)$$

$$x = ab \quad \text{или} \quad x = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta x}{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{\bar{a}} \right)^2 + \left(\frac{\delta b}{\bar{b}} \right)^2}; \quad (8б)$$

$$x = a^n b^m \quad \rightarrow \quad \frac{\delta x}{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{n \delta a}{\bar{a}} \right)^2 + \left(\frac{m \delta b}{\bar{b}} \right)^2}. \quad (8в)$$

Убедитесь, что формулы (8a) - (8в) вытекают из (8).

Нетрудно догадаться, как обобщается формула (8) и, соответственно, ее частные случаи (8а) - (8в), когда речь идет о функции не двух, а большего числа переменных. В общем случае, **погрешность вычисления значения функции равна корню квадратному из суммы квадратов погрешностей ее аргументов, с коэффициентами, равными квадрату производной от рассматриваемой функции по соответствующему аргументу.**

В качестве примера найдем погрешность определения площади поперечного сечения проволоки, о которой шла речь в предыдущем разделе. Как известно, площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Подставляя в качестве диаметра d проволоки его среднее значение $\bar{d} = 0,351$ мм, получим среднее значение площади поперечного сечения

$$\bar{S} = \frac{3,14 \cdot (0,351)^2}{4} = 0,09671 \text{ мм}^2$$

Погрешность вычисления площади, в соответствии с (8в), оценивается как

$$\delta S = \bar{S} \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\delta d}{\bar{d}}\right)^2},$$

где $\delta d = 0,006$ мм – погрешность определения \bar{d} , а $\delta\pi = 0,0016$ – погрешность числа π , обусловленная тем, что при вычислении \bar{S} мы использовали его округленное значение 3,14 вместо 3,14159265358... . Результат вычисления погрешности:

$$\delta S = 0,9671 \cdot \sqrt{\left(\frac{0,0016}{3,14}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,006}{0,351}\right)^2} = 0,033 \text{ мм}^2.$$

Заметим, что поскольку для числа π мы использовали такое округленное значение, для которого $\frac{\delta\pi}{\pi} \ll \frac{2\delta d}{\bar{d}}$, то результат вычисления погрешности практически не меняется, если ее оценивать по приближенной формуле

$$\delta S = \bar{S} \cdot \frac{2\delta d}{\bar{d}}.$$

Действительно,

$$\delta S = 0,9671 \cdot \frac{2 \cdot 0,006}{0,351} = 0,033 \text{ мм}^2.$$

Окончательный результат, с учетом правил округления, записывается как $S = 0,97 \pm 0,03 \text{ мм}^2$.

4. Графическое представление экспериментальных данных

Графики широко используются для наглядного представления результатов измерений, а также для сравнения экспериментальных данных с

теоретическими зависимостями. При построении графиков следует придерживаться следующих правил.

Для рукописных графиков следует использовать специальную (миллиметровую) бумагу. Не следует выбирать слишком малый или слишком большой лист бумаги. Удобна бумага размером в тетрадный лист.

На графике должны быть указаны физические величины, откладываемые по осям x и y , и единицы их измерения.

При построении графиков следует выбирать масштабы так, чтобы экспериментальные точки располагались на всей площади листа.

Масштаб должен быть удобным. Клетка миллиметровой бумаги может соответствовать 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100 и т.д. единицам измеряемой величины.

По осям графика указываются числа, позволяющие установить значения их делений. При этом достаточно указать три числа через равные интервалы – два по краям и одно в центре оси.

Экспериментальные точки должны изображаться крестом. Полуразмер креста по горизонтали должен быть равен погрешности δx а его вертикальный полуразмер – погрешности δy (рис.1).

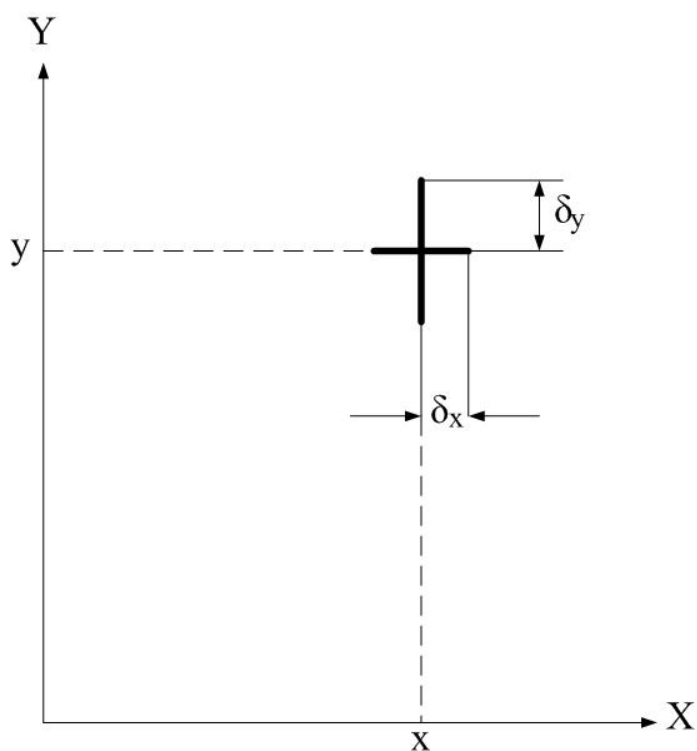


Рис. 1

Смысл этого представления заключается в том, что истинное положение точки находится где-то внутри прямоугольника, вертикальный и горизонтальный размеры которого заданы этим крестом. В том случае, если одна из погрешностей – из-за своей малости – не может быть изображена графически, экспериментальная точка изображается отрезком прямой, полуразмер которой определяется не малой погрешностью, а в случае, когда

обе погрешности не могут быть изображены графически, – точкой. Точками изображаются также экспериментальные данные, погрешности которых к моменту построения графика неизвестны.

Точки, наносимые на график, должны отмечаться карандашом, так как иначе ошибочно нанесенную точку нельзя удалить с графика, не испортив его. Никаких линий и отметок, поясняющих построение точек, на график наносить нельзя, так как они загромождают график и мешают анализировать результаты.

5. Проведение кривых через экспериментальные точки

При графической обработке экспериментальных данных через экспериментальные точки следует проводить плавную кривую, совместимую с этими точками, так, чтобы, как правило, в 2/3 случаев эти точки отступали от нее не более чем на стандартную погрешность. При этом число точек, лежащих как выше, так и ниже этой кривой, должно быть примерно одинаковым.

Математическое правило проведения кривых заключается в следующем. После того как вид кривой (прямая, парабола, экспонента,...) из тех или иных соображений (чаще всего теоретических) выбран, параметры кривой должны быть подобраны так, чтобы сумма квадратов отклонений от нее всех экспериментальных точек была наименьшей. Этот метод называется *методом наименьших квадратов*.

По осям графика удобно откладывать такие величины, чтобы теоретически ожидаемая зависимость имела вид прямой линии. Поясним сказанное на следующем примере. Допустим, что изучается свободное падение тела. Если начальная скорость тела равна нулю, то мы вправе ожидать, что зависимость времени падения t от высоты h описывается формулой

$$t = \sqrt{2h/g},$$

где g – ускорение свободного падения. Экспериментальные результаты удобно представить графически в виде зависимости

$$y = kx,$$

где $x = h$ и $y = t^2$. Соответствующий график должен представлять собой прямую (рис. 2), угловой коэффициент которой $k = 2/g$. Убеждаемся, что это действительно так, отметив на графике полученные из эксперимента точки (x_i, y_i) с учетом их погрешностей. В пределах погрешностей измерений, большинство точек должно ложиться на прямую, проходящую через начало координат. Если это так, ускорение свободного падения можно найти по наклону этой прямой: $g = 2x_0/y_0$, где x_0 и y_0 – координаты произвольной точки прямой, лучше всего соответствующей экспериментальным данным.

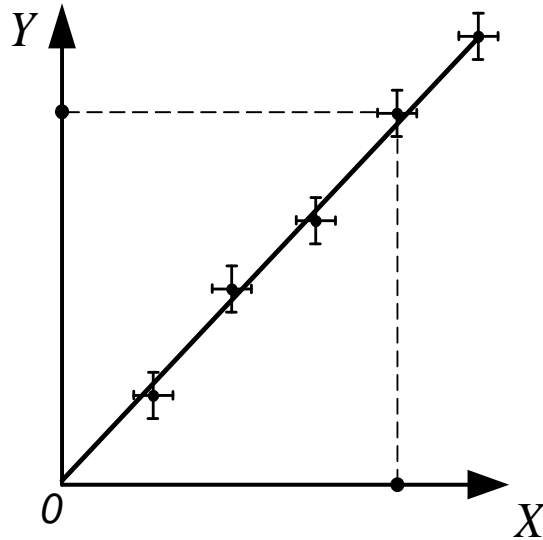


Рис. 2

Для линейной зависимости $y = kx$ можно вывести простую формулу, позволяющую избежать дополнительных неточностей, связанных с графическим определением наилучшей прямой. Требование метода наименьших квадратов математически записывается как

$$\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2 = \min,$$

где (x_i, y_i) – имеющийся набор из n экспериментальных точек. Поскольку эта функция достигает минимального значения при искомом значении k , ее производная по k должна быть равна нулю

$$-2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - kx_i) = 0. \quad (9)$$

Решая уравнение (9) относительно k , находим угловой коэффициент искомой прямой

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad (10)$$

где суммирование ведется по всем имеющимся точкам $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда в рассмотренном выше примере ускорение свободного падения вычисляется как $g = 2/k$.

Погрешность определения углового коэффициента прямой можно оценить графически. Для этого надо провести прямые с максимальным и минимальным наклоном, еще соответствующие большинству (2/3) экспериментальных точек с учетом их погрешностей (см. штрихпунктирные линии на рис. 3). Изменение их наклона по сравнению с наклоном наилучшей прямой позволяет получить оценку для δk .

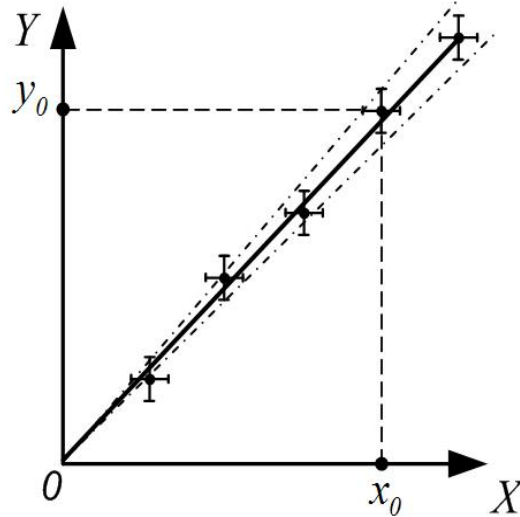


Рис.3

На практике часто встречается ситуация, когда случайная ошибка эксперимента существенно превышает систематическую. Если это так, погрешность углового коэффициента полностью определяется степенью отклонения экспериментальных точек (x_i, y_i) от наилучшей прямой. В этом случае можно избежать графического определения погрешности и воспользоваться следующей аналитической формулой, доказательство которой мы здесь не приводим:

$$\delta k = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2} - k^2}. \quad (11)$$

При расчетах следует принимать во внимание, что в формуле (11) вычитаются величины, имеющие близкие значения, что приводит к необходимости удерживать в них много значащих цифр.

Аналогичным образом могут быть получены формулы для определения параметров и других функций $y = f(x)$. Здесь мы рассмотрим еще один случай, когда зависимость y от x имеет вид

$$y = ax + b.$$

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшие значения параметров a и b определяются так, чтобы

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min.$$

Приравняв к нулю частные производные от этого выражения по параметрам a и b , получим систему уравнений:

$$-2 \sum x_i [y_i - (ax_i + b)] = 0,$$

$$-2 \sum [y_i - (ax_i + b)] = 0,$$

решая которую находим:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{D(x)}, \quad (12)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (13)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$D(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Погрешности определения параметров a и b оцениваются по формулам:

$$\delta a = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)} - a^2}, \quad (14)$$

$$\delta b = \delta a \sqrt{D(x)}, \quad (15)$$

где входящая в формулу (14) дисперсия $D(y)$ определяется аналогично дисперсии $D(x)$:

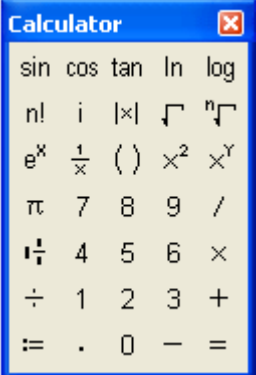



$$D(y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2.$$

При оценке погрешности по формуле (14) следует помнить, что под знаком корня вычитаются величины, имеющие близкие значения, что приводит к необходимости сохранять в них много значащих цифр.

6. Компьютерная обработка результатов измерений

Ниже представлен один из вариантов компьютерной обработки экспериментальных данных с использованием пакета Mathcad. Mathcad является математическим редактором, позволяющим проводить разнообразные научные и инженерные расчеты, начиная от элементарной арифметики и заканчивая сложными реализациями численных методов. Mathcad, в отличие от большинства других современных математических приложений, построен в соответствии с принципом WYSIWYG (What You See Is What You Get – что вы видите, то и получите). Это означает, что математические выражения, для которых нужно провести вычисления, максимально приближены к общепринятому виду. Например, если нужно посчитать синус угла $\pi/6$, то достаточно ввести с клавиатуры выражение $\sin(\pi/6) =$ и мгновенно получить ответ: $\sin(\pi/6) = 0,5$.

Для удобства ввода математических выражений в пакете Mathcad предусмотрены специальные панели инструментов, некоторые из которых представлены в таблице.

Название панели	Вид
Калькулятор	
Панель операций математического анализа	
Греческие символы	
Операции с матрицами	

После запуска программы Mathcad появляется окно программы с рабочей областью, в которой имеется изображение крестика, + обозначающего положение, куда будет вводиться то или иное математическое выражение. Оператор может изменить положение крестика, установив курсор в нужном месте экрана и щелкнув левой кнопкой мыши. Если курсор поместить на соответствующей панели инструментов, например, на панели «Калькулятор» и щелкнуть по надписи sin, то на месте крестика появится sin(■). Если вместо черного прямоугольника с клавиатуры ввести какое либо число и после закрывающей круглой скобки ввести знак=, то Mathcad мгновенно напечатает результат $\sin(1)=0.841$.

На место черного прямоугольника можно ввести любую переменную, имея в виду при этом, что она перед этим должна быть определена. Это делается оператором присваивания := (см. соответствующий символ на панели «Калькулятор»). Например, $x:=1 \quad \sin(x)=0.841$.

Рассмотрим пример обработки результатов измерений времени свободного падения, о котором шла речь в разделе 5. Результаты измерений высоты и времени падения записываются в столбцы матрицы REZ (рис.4)

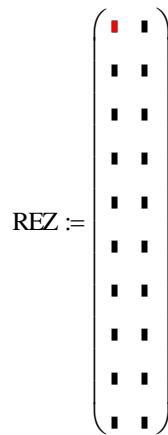


Рис.4

Далее программа, составленная в соответствии с расчетными формулами, автоматически выполняет вычисления и остается только правильно записать окончательный результат. Ниже представлен листинг программы.

ORIGIN:=1

Число экспериментальных точек: $n := 10$

REZ – матрица результатов измерений

REZ := $\begin{pmatrix} 100 & 0,45 \\ 115 & 0,48 \\ 130 & 0,52 \\ 145 & 0,54 \\ 160 & 0,57 \\ 175 & 0,59 \\ 190 & 0,62 \\ 205 & 0,65 \\ 220 & 0,67 \\ 235 & 0,70 \end{pmatrix}$

$h := REZ^{(1)}$ – вектор - столбец высот (см)

$t := REZ^{(2)}$ – вектор - столбец времен падения (с)

$Y := t^2$ – вектор - столбец квадратов времен падения (с²)

Расчет углового коэффициента прямой $y = kh$

$$k := \frac{\sum_{i=1}^n (h_i \cdot Y_i)}{\sum_{i=1}^n (h_i)^2}$$

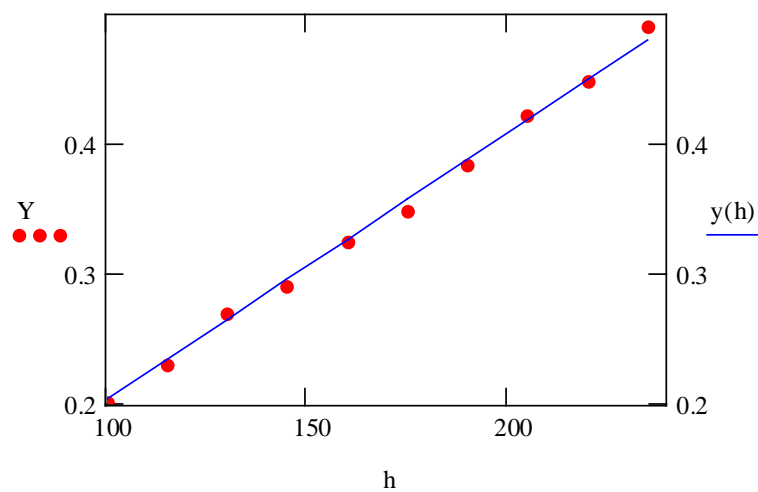
$$k = 2,041414 \cdot 10^{-3} \text{ с}^2/\text{см}$$

Расчет погрешности углового коэффициента k

$$\delta k := \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (h_i)^2} - k^2}}{\sqrt{n-1}}$$

$$\delta k = 1,031665 \cdot 10^{-5} \text{ с}^2/\text{см}$$

Проведение прямой через экспериментальные точки



Расчет ускорения свободного падения

$$g_{\text{exp}} := \frac{2}{k}$$

$$g_{\text{exp}} = 979,713021 \text{ см/с}^2$$

Расчет погрешности ускорения свободного падения

$$\delta g := \frac{g_{\text{exp}} \cdot \delta k}{k}$$

$$\delta g = 4,951156 \text{ см/с}^2$$

Результат эксперимента: $g = 980 \pm 5 \text{ см/с}^2$

7. Общие методические рекомендации

1. Студент должен приходить на очередное лабораторное занятие, заранее подготовившись к той работе, которую он будет проводить.

2. Подготовка к работе включает изучение описания работы, занесение в лабораторный журнал заголовка работы, основных рисунков, схем и расчетных формул, а также таблиц, в которые будут записываться результаты измерений.

3. Готовность к работе подразумевает понимание цели работы, физической сути исследуемого явления, методики измерений, последовательности и содержания отдельных этапов работы, а также ожидаемых результатов.

4. Результаты измерений записываются в таблицы только ручкой (не карандашом) и последующим поправкам не подлежат. В отличие от вычислений, эксперимент нельзя подправить, его можно только переделать заново.

5. Приступая к измерениям, не спешите сразу записать результат в таблицу. Проведите пробные измерения, убедитесь, что Вы умеете пользоваться данным измерительным прибором, и только после этого начинайте фиксировать результаты.

6. Расчеты и окончательное оформление работы проводятся, как правило, дома, а защита работы – на следующем лабораторном занятии.

7. Все расчеты, включая черновые, должны присутствовать в лабораторном журнале. Преподаватель должен иметь возможность проверить Ваши расчеты и найти нередко встречающиеся ошибки.

8. Оформленная работа заканчивается Заключением или Выводами, в которых должны быть лаконично сформулированы полученные результаты,

приведены значения определенных в работе физических величин, а также их сравнение с табличными данными, если таковые имеются.

9. Защита работы подразумевает не только проверку ее полного оформления, но и демонстрацию студентом понимания физической сути изучаемого явления, а также ответов на контрольные вопросы, приведенные в описании к работе.

Выполнение и защита всех предусмотренных программой лабораторных работ является необходимым условием допуска к зачету и (или) экзамену.

1. МЕХАНИКА

1.1. ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

1. Введение

Одним из простейших видов движения твердого тела является вращательное движение, при котором траекториями точек тела являются окружности, лежащие в параллельных плоскостях, центры которых находятся на одной прямой, называемой осью вращения.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси имеет вид

$$I\varepsilon = M, \quad (1)$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – его угловое ускорение, а M – сумма проекций моментов внешних сил на направление углового ускорения. Это уравнение аналогично уравнению Ньютона для движения материальной точки

$$ma = F, \quad (2)$$

где m – масса точки, a – ее ускорение, F – сумма проекций сил на направление ускорения. В уравнении (1) роль массы играет момент инерции, роль силы – момент силы, роль ускорения – угловое ускорение.

Момент инерции характеризует инертные свойства тела при его вращении. Однако следует иметь в виду, что эта величина существует безотносительно к вращению. Каждое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

В соответствии с теоремой Гюйгенса – Штейнера (теоремой о параллельных осях) момент инерции тела I_C относительно оси, проходящей через его центр масс и момент инерции I относительно любой другой параллельной оси связаны соотношением

$$I = I_C + mR^2, \quad (3)$$

где m – масса тела, R – расстояние между осями.

Целью настоящей работы является экспериментальная проверка соотношений (1) и (3).

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Экспериментальная установка, схема которой представлена на рис.1, называется маятником Обербека. Основная часть маятника – крестовина,

вращающаяся на горизонтальной оси, на спицах которой закреплены грузы m_0 . Момент инерции маятника можно менять, передвигая грузы вдоль спиц.

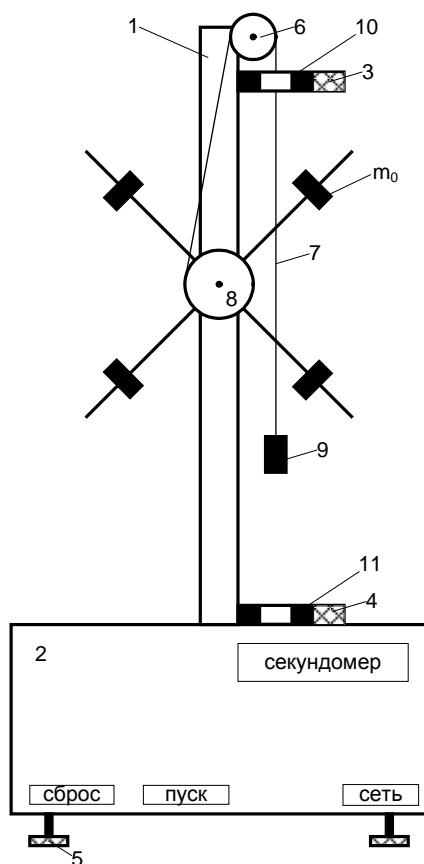


Рис. 1

На вертикальной колонне (1), установленной на основании (2), прикреплены два кронштейна: верхний подвижный (3) и нижний неподвижный (4). Основание снабжено регулируемыми ножками (5), обеспечивающими горизонтальную установку прибора.

На верхней втулке закреплен шкив (6). Через этот шкив перекидывается нить (7). Один конец нити прикреплен к шкиву (8), а на втором конце закреплен груз (9). На подвижном кронштейне закреплен электромагнит (10), который, после подключения к нему напряжения питания, удерживает в состоянии покоя крестовину с грузами. Подвижный кронштейн (3) можно перемещать вдоль колонны (1) и фиксировать его в любом положении, задавая, таким образом, высоту падения грузов. С целью отсчета длины на колонне нанесена миллиметровая шкала.

На подвижном кронштейне закреплен фотоэлектрический датчик №1, вырабатывающий импульс начала измерения времени падения грузов. На неподвижном кронштейне (4) укреплен фотоэлектрический датчик №2, вырабатывающий импульс конца измерения и включающий тормозной электромагнит (11).

На основании прибора имеется электронный секундомер, предназначенный для измерения времени падения груза.

Вращающий момент, создаваемый силой натяжения нити T , равен $M = Tr$, где r – радиус шкива (6). Кроме того на маятник действует момент сил трения в оси M_{mp} . С учетом этого уравнение (1) примет вид

$$I\varepsilon = Tr - M_{mp}. \quad (4)$$

Согласно второму закону Ньютона для груза (9) имеем

$$ma = mg - T, \quad (5)$$

где m – масса падающего груза, a – его ускорение, g – ускорение свободного падения.

Ускорение a груза связано с угловым ускорением ε маятника кинематическим условием

$$a = \varepsilon r, \quad (6)$$

выражающим разматывание нити со шкива (8) без проскальзывания.

Решая уравнения (4) – (6) совместно, получим

$$\varepsilon = \frac{mgr - M_{mp}}{I + mr^2}. \quad (7)$$

Формула (7) дает связь между угловым ускорением ε и моментом инерции I маятника. В условиях опытов $mr^2 \ll I$, и формула (7) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{1}{I}(mgr - M_{mp}). \quad (8)$$

Момент инерции маятника согласно теореме Гюйгенса – Штейнера и его свойства аддитивности может быть записан как

$$I = I_0 + 4m_0R^2, \quad (9)$$

где I_0 – момент инерции маятника при условии, что центр масс каждого груза m_0 находится на оси вращения, R – расстояние от оси до центров грузов m_0 . С учетом (6) и (9) формулу (8) для случая, когда $mgr \gg M_{mp}$, представим в виде

$$\frac{a}{r} = \frac{mgr}{I_0 + 4m_0R^2}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$\frac{g}{a} = \frac{I_0}{mr^2} + \frac{4m_0}{m} \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (11)$$

Зависимости (8) и (11) могут быть проверены экспериментально, поскольку ускорение a , а с ним и угловое ускорение $\varepsilon = a/r$, можно найти, измеряя время t , за которое груз m опускается с высоты h ,

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (12)$$

Если построить график зависимости углового ускорения ε от момента внешней силы $M = mgr$ при условии, что момент инерции I остается постоянным, то согласно (8) экспериментальные точки должны ложиться на

прямую, угловой коэффициент которой равен $1/I$, а точка пересечения с осью M равна $M_{тр}$.

Зависимость момента инерции I от расстояния R грузов m_0 до оси вращения можно проверить, построив график зависимости отношения g/a от $(R/r)^2$. Согласно (11) экспериментальные точки должны ложиться на прямую, угловой коэффициент которой равен $4m_0/m$, а точка пересечения с осью g/a дает I_0/mr^2 .

3. Порядок выполнения работы

Задание 1. Исследование зависимости углового ускорения от момента внешней силы

1. Убедиться, что колонна прибора находится в строго вертикальном положении и груз m не задевает корпуса верхнего и нижнего фотоэлектрических датчиков.
2. Сдвинуть подвижный кронштейн на выбранную высоту, указанную преподавателем, и установить так, чтобы грузы, падая, проходили через середину рабочего окна фотоэлектрических датчиков.
3. Установить грузы m_0 на расстоянии R , указанном преподавателем, и проверить хорошо ли сбалансирован маятник, т.е. находится ли он в состоянии безразличного равновесия.
4. Включить сетевой шнур измерителя в сеть питания.
5. Нажать клавишу СЕТЬ и проверить, показывают ли все индикаторы измерителя нуль, и горят ли индикаторы обоих фотоэлектрических датчиков.
6. Переместить груз m в верхнее положение и проверить находится ли система в состоянии покоя. При этом груз должен быть на уровне верхнего края окна фотоэлектрического датчика.
7. Пробный пуск: нажать клавишу ПУСК и проверить, произошло ли движение системы; измерил ли секундомер время прохождения пути.
8. Нажать клавишу СБРОС и проверить, произошло ли обнуление показаний секундомера и освобождение блокировки грузов электромагнитом.
9. Перевести грузы в верхнее положение, отжать клавишу ПУСК и проверить, произошла ли повторная блокировка маятника.
10. Измерить пять раз время t падения груза m . Найти среднее значение \bar{t} . Результаты записать в таблицу 1.
11. Повторить этот опыт для 4 – 5 различных значений масс m груза.
12. Вычислить угловое ускорение ε и вращающий момент M и построить график зависимости ε от M . Из графика определите момент инерции маятника I и момент сил трения $M_{тр}$. Оцените погрешности в определении этих величин.

Таблица 1

$h =$

$r = 25 \text{ мм}$

$m, \text{ Г}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$\bar{t}, \text{ с}$	$\varepsilon, \text{ с}^{-2}$	$M, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2 / \text{ с}^2$

Результаты эксперимента:

$I =$

$M_{mp} =$

Задание 2. Исследование зависимости момента инерции маятника от расстояния грузов до оси вращения

1. Установить массу m падающего груза, указанную преподавателем.
2. Закрепить на спицах крестовины массы m_0 на заданном преподавателем расстоянии R .
3. Не менее 5 раз произвести измерение времени t падения груза m и определить его среднее значение \bar{t} . Результаты записать в таблицу 2.
4. Повторить измерения времени t для 4 – 5 различных значений расстояния R .
5. Вычислить ускорение a и значения $(R/r)^2$ и g/a . По полученным данным построить график зависимости g/a от $(R/r)^2$.
6. Сделать выводы, находятся ли результаты эксперимента в соответствии с теорией.

Таблица 2

$R, \text{ см}$	$(R/r)^2$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$\bar{t}, \text{ с}$	$a, \text{ м/с}^2$	g/a

Контрольные вопросы

1. Что называют угловым ускорением? Как связаны тангенциальное и угловое ускорения?
2. Напишите основное уравнение динамики вращательного движения.
3. Дайте определения момента силы относительно точки и оси. Могут ли разные по величине силы вызвать одинаковое угловое ускорение вращения тела?
4. Какая величина называется моментом инерции тела, и какую роль она играет во вращательном движении?
5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса – Штейнера.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика – М.: Наука. Физматлит, 1998.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

1.2. ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

1. Введение

Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух основных видов движения – поступательного и вращательного.

При поступательном движении твердого тела все точки тела за один и тот же промежуток времени получают одинаковые по величине и направлению перемещения. Любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе при поступательном движении тела.

При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси вращения (жестко связанной с телом) все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой – неподвижной оси вращения. Поступательное и вращательное движения твердого тела – простейшие виды движения тел.

Можно выделить еще один относительно простой вид движения твердого тела – плоское движение. При плоском движении твердого тела все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Наглядный пример плоского движения тела – качение цилиндра по плоскости.

Произвольное движение твердого тела описывается двумя уравнениями:

$$m\mathbf{a}_c = \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \mathbf{M}_c, \quad (2)$$

где m , \mathbf{a}_c , \mathbf{L}_c – масса, ускорение центра масс, момент импульса твердого тела относительно центра масс соответственно, \mathbf{F} – сумма всех внешних сил, действующих на тело, \mathbf{M}_c – сумма моментов этих сил относительно центра масс. Уравнение (1) описывает поступательное движение центра масс тела. Уравнение (2) описывает вращение тела относительно центра масс.

Если тело совершает плоское движение, уравнение (2) приводится к виду

$$I\varepsilon_z = M_z, \quad (3)$$

где ε_z – проекция углового ускорения тела на ось вращения Z ; M_z – проекция суммарного момента сил, действующих на тело, на ту же ось; I – момент инерции тела относительно оси вращения Z .

В настоящей работе изучается плоское движение тел, используя простейшие тела симметричной формы. При этом оси симметрии тел будут совпадать с осями вращения и проходить через центр масс. Таким образом, движение твердых тел описывается уравнениями (1) и (3). Кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью, равной скорости движения центра масс тела v_c , и энергии вращения тела с угловой скоростью ω относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (4)$$

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Плоское движение тела в настоящей работе изучается на установке, называемой «Маятник Максвелла», схематически изображенной на рис. 1.

На вертикальной колонне 2, закрепленной на основании 4, установлены два кронштейна: неподвижный верхний 1 и подвижный нижний 3. На верхнем кронштейне расположен электромагнит, удерживающий маятник в верхнем положении, устройство для крепления нити бифилярного подвеса маятника.

Нижний кронштейн с прикрепленным к нему фотодатчиком может перемещаться вдоль колонны и фиксироваться в произвольном положении, определяемом по миллиметровой шкале на колонне прибора. Для определения положения кронштейн снабжен указателем, совпадающим с оптической осью фотодатчика, прикрепленного к кронштейну. Фотодатчик соединен с миллисекундомером, расположенным на основании установки.

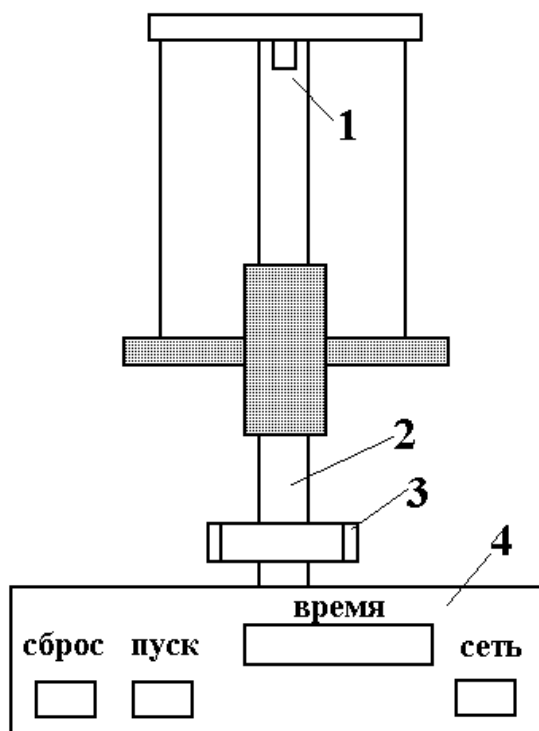


Рис. 1

Маятник установки – это ролик, жестко закрепленный на оси. Ось с помощью двух нитей подвешена к верхнему кронштейну (бифилярный способ подвески). Ось маятника имеет форму тонкостенного цилиндра; ролик – форму сплошного кругового цилиндра. На ролик надето кольцо.

Маятник поворачивают вокруг оси симметрии, наматывая равномерно на его ось нити бифилярного подвеса. С помощью электромагнита маятник фиксируется в крайнем верхнем положении. После отключения электромагнита маятник начинает опускаться, скручиваясь с нитями подвеса.

Миллисекундомер начинает отсчет времени движения маятника. Когда маятник опустится на максимальную длину, нижний край его съемного кольца пересечет оптическую ось фотодатчика, прикрепленного к нижнему кронштейну. Миллисекундомер автоматически прекратит отсчет времени, и на его табло будет показано время t опускания маятника на максимальную длину маятника h . Эта длина определяется указателем положения нижнего кронштейна по миллиметровой шкале на колонне (верхнее положение маятника соответствует нулевой отметке шкалы). Тогда ускорение, с которым опускалась ось маятника (или, что то же самое, ускорение его центра масс), определяется по формуле

$$a_c = \frac{2h}{t^2}. \quad (5)$$

Уравнения (1) и (3), описывающие плоское движение твердого тела, в применении к маятнику Максвелла имеют вид:

$$ma_c = mg - 2F, \quad (6)$$

$$I\varepsilon = 2FR, \quad (7)$$

где m – суммарная масса оси, ролика и кольца, g – ускорение свободного падения, I – суммарный момент инерции оси, ролика и кольца относительно оси симметрии маятника, F – сила натяжения каждой из нитей бифилярного подвеса, R – сумма радиусов оси маятника и нити бифилярного подвеса, ε – величина углового ускорения маятника.

Уравнения (6) и (7) должны быть дополнены уравнением, связывающим угловое ускорение ε маятника с ускорением a_c его центра масс

$$a_c = \varepsilon R. \quad (8)$$

Решая систему уравнений (5) – (8), находим

$$t^2 = \frac{2}{g} \left(1 + \frac{4I_{\text{э}}}{m(d_o + d_n)^2} \right) h, \quad (9)$$

где d_o – диаметр оси маятника, d_n – диаметр нити подвеса, $m = m_o + m_p + m_k$ – суммарная масса маятника, представляющая собой сумму масс его оси m_o , ролика m_p и кольца m_k . Угловой коэффициент прямой t^2 от h зависит в частности от момента инерции маятника. В работе экспериментально проверяется зависимость (9) и определяется момент инерции маятника. Полученное значение момента инерции сравнивается с теоретическим.

Теоретическое значение момента инерции маятника определяется по формуле

$$I_T = I_o + I_p + I_k, \quad (10)$$

где

$$I_o = \frac{1}{8} m_o \cdot d_o^2, \quad I_p = \frac{1}{8} m_p (d_p^2 + d_o^2), \quad I_k = \frac{1}{8} m_k (d_k^2 + d_p^2) \quad (11)$$

– моменты инерции оси, ролика и кольца соответственно, d_o – диаметр оси; d_p – диаметр ролика и внутренний диаметр кольца; d_k – внешний диаметр кольца.

Параметры маятника:

Диаметр оси $d_o = 0,01$ м

Внешний диаметр ролика $d_p = 0,086$ м

Внешний диаметр кольца $d_k = 0,105$ м

Диаметр нити подвеса $d_n = 0,0005$ м

Масса оси маятника $m_o = 0,0325$ кг

Масса ролика $m_p = 0,1258$ кг

Масса сменных колец m_k : 1) 0,515 кг, 2) 0,386 кг, 3) 0,255 кг.

3. Порядок выполнения работы

1. Записать значение массы кольца, надетого на ролик (указана на кольце).
2. По миллиметровой шкале определить положение нижнего кронштейна.
3. Включить прибор нажатием клавиши СЕТЬ (клавиша ПУСК при этом отжата, и на магнит подано напряжение).
4. Равномерно намотав нити на ось маятника, закрепить его с помощью магнита в крайнем верхнем положении.
5. Нажать клавишу ПУСК. С электромагнита автоматически будет снято напряжение, и маятник, скручиваясь с нити, начнет опускаться вниз. Миллисекундомер начнет отсчитывать время спуска. После пересечения нижним краем кольца оптической оси фотодатчика, расположенного на нижнем кронштейне, миллисекундомер автоматически прекратит отсчет времени.
6. Записать в таблицу время движения маятника.
7. Повторить измерение времени движения t маятника еще четыре раза. Для этого необходимо выполнить следующие действия:
 - Отжать клавишу ПУСК;
 - Закрепить маятник в крайнем верхнем положении, как это описано в п.4;
 - Нажать клавишу СБРОС: на табло секундомера будут высвечены нули – прибор готов для повторных измерений.
8. Изменить высоту падения маятника и повторить измерения, описанные в пп. 4 – 7. Всего провести измерения для пяти различных значений h .
9. Построить график зависимости t^2 от h и определить угловой коэффициент прямой, проходящей через экспериментальные точки. Оценить погрешность его определения.

10. По угловому коэффициенту прямой t^2 от h вычислить экспериментальное значение момента инерции маятника и оценить его погрешность.
11. По формулам (10), (11) определить теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла. Сделать заключение о совпадении экспериментального и теоретического результатов.

Таблица

$$m_{\kappa} =$$

$h, \text{ м}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$\bar{t}, \text{ с}$

Экспериментальное значение

$$I_{\text{э}} =$$

Теоретическое значение

$$I_{\text{т}} =$$

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется плоским?
2. Сформулируйте основные уравнения плоского движения тел.
3. Выведите формулы (11) для моментов инерции оси, ролика и кольца.
4. Сплошной металлический шар и металлическая оболочка одинакового радиуса и массы скатываются без проскальзывания с одной и той же горки. Чья поступательная скорость на горизонтали будет выше? Те же объекты, разогнанные с одинаковой скоростью, вкатываются на горку. Какой из них поднимется выше?
5. Одинаковую ли скорость получит центр шара у основания наклонной плоскости, если один раз он соскальзывает (без трения), а другой раз скатывается с нее? Сопротивление воздуха не учитывать.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика – М.: Наука. Физматлит, 1998.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

1.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕЦЕССИИ СВОБОДНОГО ГИРОСКОПА

1. Введение

Гироскоп представляет собой массивное симметричное тело (ротор), вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. При этом одновременно возможно вращение ротора вокруг еще двух осей, причем все оси перпендикулярны друг другу. Обычно гироскоп подвешивается таким образом, что одна из точек его оси оказывается закрепленной (так называемая точка опоры гироскопа). Существуют разные технические способы реализации такой системы. Один из них — карданов подвес (рис.1).

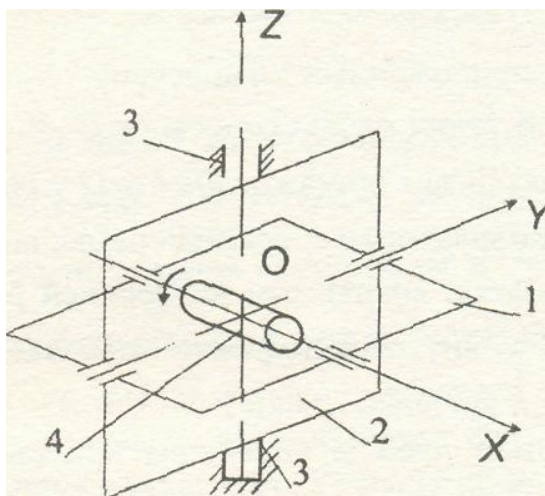


Рис. 1

Подвес состоит из двух рамок: внутренней 1 и внешней 2. Внешняя рамка может вращаться относительно подставки 3 вокруг оси Z. Во внутренней рамке монтируются подшипники ротора 4, а она сама может вращаться относительно внешней рамки вокруг оси Y. Таким образом, ось ротора X может занимать любое положение в пространстве. Сам гироскоп в кардановом подвесе имеет три степени свободы и может совершать любые повороты вокруг центра подвеса O (точки опоры гироскопа) — точки пересечения осей карданова подвеса.

В уравновешенном (статическом) гироскопе центр масс гироскопа совпадает с центром подвеса O. Если трение в подшипниках и трение ротора о воздух малы, момент приложенных к гироскопу внешних сил \mathbf{M} относительно точки O равен нулю и момент импульса \mathbf{L} гироскопа остается постоянным. Такой гироскоп называется свободным. Способность сохранять неизменным направление своей оси в пространстве является одним из основных свойств свободного гироскопа.

Все явления, наблюдаемые при движении гироскопа под действием приложенных к нему внешних сил, — следствие основного закона динамики вращательного движения

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (1)$$

причем момент импульса ротора гироскопа \mathbf{L} и суммарный момент \mathbf{M} внешних сил, приложенных к гироскопу, берутся относительно неподвижной точки гироскопа O .

Пусть к какой-нибудь точке A гироскопа приложена постоянная сила \mathbf{F} , например, подвешен небольшой грузик (рис. 2). Момент \mathbf{M} этой силы направлен вдоль оси Y . За время dt момент импульса гироскопа \mathbf{L} получит приращение $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$, совпадающее по направлению с \mathbf{M} , и будет равен результирующей $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + d\mathbf{L}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси Z . Направление вектора \mathbf{L}' совпадает с новым направлением оси X вращения гироскопа. Таким образом, ось гироскопа повернется на угол $d\varphi$.

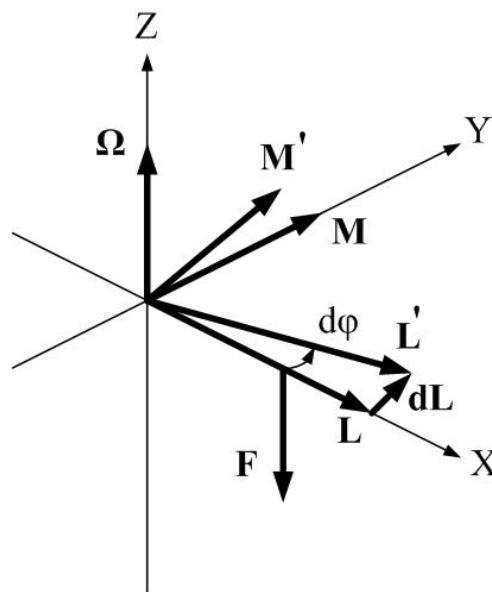


Рис. 2

Одновременно на такой же угол повернется в плоскости XY вектор \mathbf{M} . В результате, спустя время dt , будет иметь место такое же взаимное расположение векторов \mathbf{L} и \mathbf{M} , как и в начальный момент. За последующий момент времени dt вектор \mathbf{L} вновь получит приращение $d\mathbf{L}$, перпендикулярное \mathbf{L} и т.д. В итоге ось гироскопа будет поворачиваться вокруг оси Z . Такое движение гироскопа называется прецессией. Угловая скорость прецессии определяется отношением

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

Важная особенность рассматриваемой модели гироскопа заключается в том, что момент импульса вращающегося гироскопа \mathbf{L} относительно точки O можно с большой степенью точности положить равным его собственному моменту импульса

$$L = I\omega, \quad (3)$$

где I – момент инерции гироскопа относительно оси X ротора, ω – угловая скорость собственного вращения ротора гироскопа. Это объясняется тем, что вращение гироскопа вокруг собственной оси совершается с угловой скоростью, исчисляемой тысячами оборотов в минуту, так что имеет место условие: $\Omega \ll \omega$. В этом приближении

$$d\mathbf{L} = \mathbf{e}_z d\varphi \times \mathbf{L}, \quad (4)$$

где \mathbf{e}_z – орт оси Z , а знак \times означает векторное произведение. Подставляя (4) в (1), получим соотношение, связывающее момент внешних сил \mathbf{M} , момент импульса гироскопа \mathbf{L} и угловую скорость прецессии $\mathbf{\Omega} = \mathbf{e}_z d\varphi/dt$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (5)$$

Если ось гироскопа X горизонтальна, то из (5) с учетом (3) следует, что

$$\Omega = \frac{M}{I\omega}. \quad (6)$$

Целью настоящей работы является экспериментальная проверка соотношения (6).

2. Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 3. В качестве гироскопа в работе используется ротор электродвигателя 1 с маховиком 12, насаженным на вал двигателя. Двигатель смонтирован на кронштейне 11 таким образом, что может поворачиваться вокруг горизонтальной оси Y , а вращательный соединитель 5 позволяет поворачиваться вокруг вертикальной оси Z .

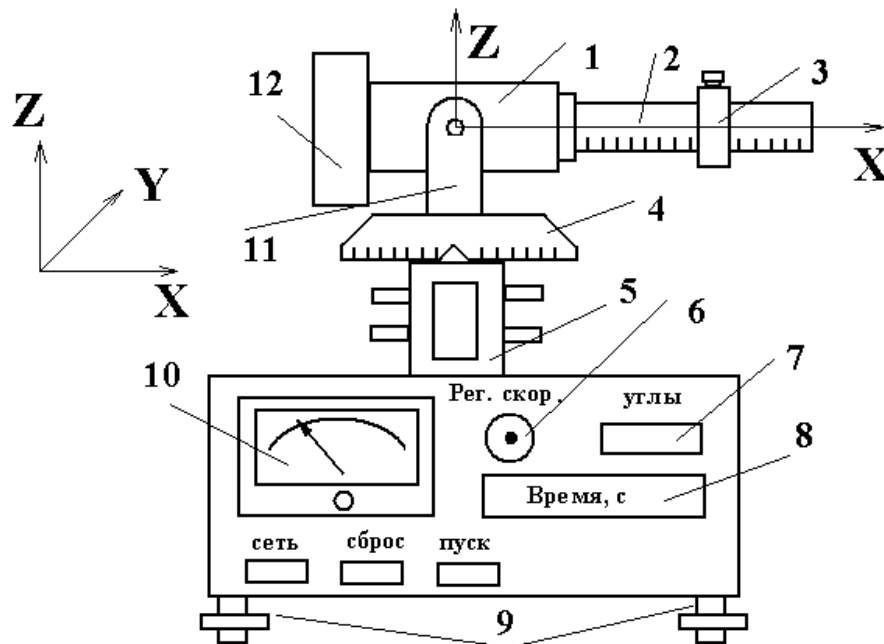


Рис. 3

Таким образом, ось ротора X может занимать любое положение в пространстве и гироскоп имеет три степени свободы. На корпусе двигателя укреплен рычаг 2, который конструктивно выполнен как продолжение оси

вращения ротора. Вдоль рычага может перемещаться и фиксироваться груз 3. Положение груза 3 на рычаге определяется по миллиметровой шкале, нанесенной на рычаг. Перемещая по рычагу груз 3, можно изменять момент внешних сил, действующих на гироскоп. Гироскоп смонтирован на горизонтальном основании, снабженном ножками 9 с регулируемой высотой, что позволяет производить выравнивание прибора по уровню. Величина угловой скорости вращения ротора определяется по стрелочному индикатору 10. Угол поворота φ оси ротора вокруг вертикальной оси Z и соответствующее время поворота на этот угол даются цифровыми индикаторами 7 и 8. Измерения производятся автоматически с помощью фотоэлектрических датчиков. На лицевой панели прибора находятся следующие элементы управления.

- Клавиша СЕТЬ. Нажатием этой клавиши включается питающее напряжение. При этом на всех цифровых индикаторах высвечиваются нули.
- Клавиша СБРОС. Нажатием этой клавиши вызывается сброс измерений и генерируется сигнал на разрешение нового измерения.
- Клавиша СТОП. Нажатием этой клавиши вызывают генерирование сигнала разрешения на окончание процесса измерения.
- Ручка 6 РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ. Вращением этой ручки по часовой стрелке включают напряжение питания электродвигателя. Этой же ручкой осуществляется плавная регулировка скорости вращения ротора электродвигателя.

3. Порядок выполнения работы

Задание 1. Исследование зависимости угловой скорости прецессии гироскопа от момента внешних сил

1. Убедитесь, что установка выровнена горизонтально (по уровню, имеющемуся на диске с делениями 4). В противном случае отрегулируйте установку винтами ножек основания 9.
2. Убедитесь, что потенциометр регулировки скорости выключен (его ручка 6 повернута против часовой стрелки до упора).
3. Передвигая груз 3 вдоль рычага, уравновесить гироскоп. Рычаг 2 после уравнивания гироскопа должен находиться в строго горизонтальном положении. Записать в журнал значение l_0 равновесного положения груза 3 на рычаге.
4. Включить установку клавишей СЕТЬ. Плавно поворачивая по часовой стрелке ручку регулятора скорости 6, установить скорость вращения ротора указанную преподавателем.
5. Придерживая рычаг 2, сместить груз 3 на $3 \div 4$ см от равновесного положения l_0 в сторону, противоположную той, на которой находится

5. Как зависит угловая скорость прецессии гироскопа Ω от угловой скорости n вращения ротора?
6. Как зависит угловая скорость прецессии гироскопа Ω от момента инерции I ротора при постоянной скорости n его вращения и неизменных массе m и положении l перегрузка?
7. Как влияют силы трения на поведение оси гироскопа?

Литература

3. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика – М.: Наука. Физматлит, 1998.
4. Иродов И.Е. Механика. Основные законы – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

1. Введение

Момент инерции относительно оси является мерой инертности тела при вращении вокруг этой оси подобно тому, как масса является мерой инертности тела при его поступательном движении (напомним, что инертность тела это стремление сохранять состояние покоя или движения при попытках изменить это состояние). Чем больше момент инерции, тем труднее раскрутить тело одной и той же силой, имеющей ненулевой момент относительно оси вращения.

Момент инерции относительно оси определяется не только массой тела, но и тем как эта масса распределена в пространстве относительно выбранной оси. Чем дальше одна и та же масса находится от оси, тем больше момент инерции тела относительно этой оси.

Момент инерции твердого тела относительно оси Z определяется следующим образом. Все тело разбивается на бесконечное число бесконечно малых элементарных масс m_i , каждая из которых удалена от оси на расстояние ρ_i (см. рис. 1). После этого вычисляется сумма

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (1)$$

На практике процедура суммирования заменяется интегрированием

$$I = \int \rho^2 dm. \quad (2)$$

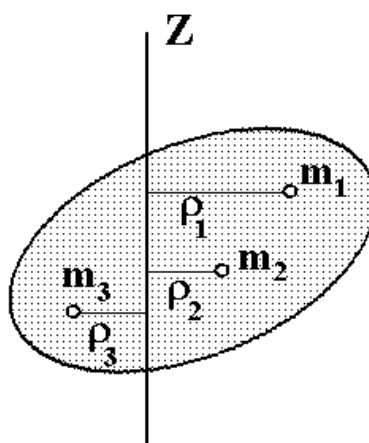


Рис. 1

Моменты инерции простейших тел, обладающих той или иной симметрией относительно оси, вычислены и хорошо известны. Существует ряд полезных приемов, позволяющих вычислять моменты инерции относительно тех или иных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера, теорема о моменте инерции плоской фигуры относительно трех взаимно

перпендикулярных осей и т.д.). У тел неправильной формы момент инерции может быть определен экспериментально. Показать, как это делается – цель этой лабораторной работы.

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Одним из удобных методов измерения моментов инерции твердых тел является метод крутильных колебаний. Для определения момента инерции твердых тел при помощи крутильных колебаний предназначен крутильный маятник, который представлен на рис. 2.

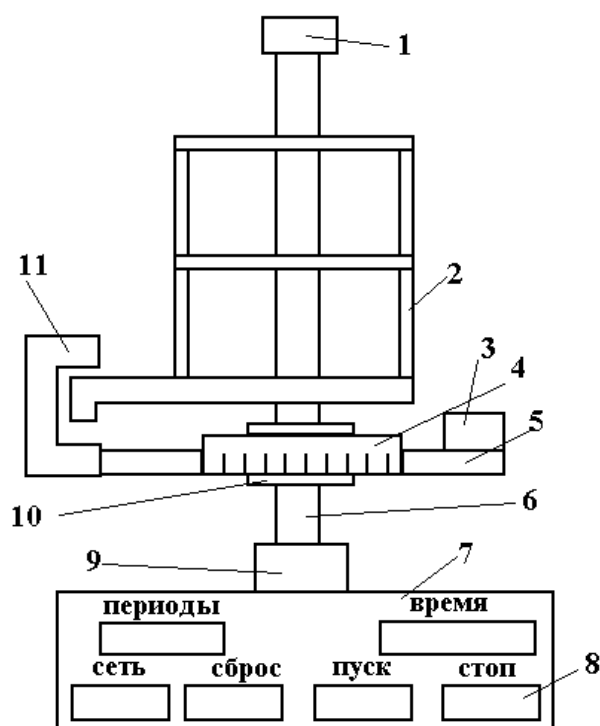


Рис. 2

На основании 8, оснащенном четырьмя ножками с регулируемой высотой, прикреплен микросекундомер 7. К основанию прикреплена колонка 6, на которой при помощи прижимных винтов закреплены кронштейны 1, 10, 9. Кронштейны 1 и 9 имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 2. На кронштейне 10 закреплена стальная плита 5, которая служит основанием фотоэлектрическому датчику 11 и электромагниту 3.

Исследуемые тела крепятся на рамке при помощи подвижной балки, которая перемещается по направляющим между неподвижными балками. Подвижная балка устанавливается путем затягивания гаек на зажимных втулках, помещенных на ней.

Во время колебаний крутильного маятника стрелка рамки прерывает световой поток, падающий с лампочки на фототранзистор

фотоэлектрического датчика 11. В результате этого в электронной схеме прибора формируются электрические импульсы, которые после усиления подаются на миллисекундомер. Миллисекундомер подсчитывает время полных колебаний маятника и их число.

Электромагнит 3 предназначен для фиксации рамки в начальном положении перед каждым очередным измерением.

На лицевой панели миллисекундомера есть четыре клавиши.

Клавиша СЕТЬ – выключатель сети. Нажатие этой клавиши включает питающее напряжение. Это определяется визуально по свечению цифровых индикаторов, высвечивающих нули на табло миллисекундомера, и свечения лампочки фотоэлектрического датчика 11.

Клавиша СБРОС – сброс измерителя. Нажатие этой клавиши вызывает сброс схем миллисекундомера и генерирование сигнала на разрешение измерения.

Клавиша ПУСК – выключение электромагнита. Нажатие этой клавиши снимает напряжение с обмоток электромагнита и освобождает рамку, давая ей возможность совершать свободные колебания.

Клавиша СТОП – окончание измерения. Нажатие этой клавиши вызывает генерирование сигнала разрешения на окончание процесса счета.

При повороте рамки из положения равновесия на некоторый угол φ на нее со стороны проволоки действует упругий момент, пропорциональный углу поворота φ

$$M_{\text{упр}} = -D\varphi, \quad (3)$$

где D – постоянная момента упругих сил. Формула (3) – аналог закона Гука. Если проволока достаточно тонкая и длинная, то, как показывает опыт, зависимость (3) справедлива и для довольно больших углов, например, $\varphi = \pi$. Кроме того, затухание колебаний крутильного маятника обычно мало и им можно пренебречь. В этом случае движение рамки описывается уравнением

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi, \quad (4)$$

где I – момент инерции рамки с исследуемым телом. Уравнение (4) представляет собой уравнение гармонических колебаний, период которых

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (5)$$

На основании аддитивности момента инерции

$$I = I_0 + I_T, \quad (6)$$

где I_0 – момент инерции рамки, I_T – момент инерции исследуемого тела. Для определения I_T измеряют периоды колебаний рамки: T с исследуемым телом, T_0 с эталонным телом, момент инерции I_0 которого известен, и T_0 рамки без тел. В данной работе эталонное тело это металлический кубик с длиной ребра $a = 50$ мм и массой $m = 980$ г. Момент инерции этого кубика относительно оси, параллельной ребру и проходящей через его центр

$$I_{\text{э}} = \frac{ma^2}{6} = (408 \pm 8) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (7)$$

Зависимость измеряемых периодов от соответствующих моментов инерции дается системой уравнений:

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2(I + I_0)/D, \\ T_0^2 &= 4\pi^2 I_0/D, \\ T_{\text{э}}^2 &= 4\pi^2(I_{\text{э}} + I_0)/D. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая из этой системы неизвестные величины I_0 и D , получаем формулу для неизвестного момента инерции тела

$$I = I_{\text{э}} \frac{T^2 - T_0^2}{T_{\text{э}}^2 - T_0^2}. \quad (9)$$

В работе в качестве исследуемого тела используются параллелепипеды, размеры и масса которых приведены в таблице 1.

Таблица 1.

№	a , мм	b , мм	c , мм	m , г
1	40	60	100	1884
2	50	50	100	1962

Теоретическое значение момента инерции параллелепипеда относительно оси, параллельной ребру c и проходящей через его центр

$$I = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}. \quad (10)$$

3. Порядок выполнения работы

1. Включить прибор нажатием клавиши СЕТЬ.
2. Поворачивая рамку прибора, приблизить ее стрелку к электромагниту с целью фиксирования начального положения рамки.
3. Нажать клавишу СБРОС.
4. Нажать клавишу ПУСК. При этом рамка начнет совершать свободные колебания.
5. Измерить время t 10 полных колебаний рамки и результат записать в таблицу 1 (чтобы измерить время 10 полных колебаний, необходимо нажать кнопку СТОП, когда на табло периодов будет число 9).
6. Вычислить период колебаний $T_0 = t/N$. Измерения повторить не менее пяти раз при разных числах колебаний N .
7. Поместить в рамку эталонное тело (кубик) и измерить период колебаний $T_{\text{э}}$ согласно пп. 2 – 6.
8. Поместить в рамку исследуемое тело (параллелепипед) и измерить период колебаний T согласно пп. 2 – 6. Измерения периода T провести для двух

различных положений параллелепипеда в рамке, указанных преподавателем.

9. Вычислить экспериментальные значения моментов инерции параллелепипеда используя формулы (9) и (7) и оценить погрешности их определения.

10. Сравнить экспериментальные значения моментов инерции параллелепипеда с теоретическими, рассчитанными по формуле (10).

Таблица 1. Период колебаний пустой рамки и с эталонным телом

№ опыта	Пустая рамка			Эталонное тело		
	N	t, c	T_0, c	N	t, c	$T_э, c$
1						
2						
3						
4						
5						
Среднее значение				Среднее значение		

Таблица 2. Период колебаний рамки с исследуемым телом

№ опыта	Положение №1			Положение №2		
	N	t, c	T_1, c	N	t, c	T_2, c
1						
2						
3						
4						
5						
Среднее значение				Среднее значение		

Экспериментальные значения:

$$I_1 = \quad \quad \quad I_2 =$$

Теоретические значения:

$$I_1 = \quad \quad \quad I_2 =$$

Контрольные вопросы

1. Что называют моментом инерции тела?
2. Выведите формулу (10) для вычисления момента инерции параллелепипеда.

3. Зависит ли сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей от их ориентации?
4. Чему равен момент инерции куба относительно его диагонали?
5. Сформулируйте теорему о моменте инерции плоской фигуры относительно трех взаимно перпендикулярных осей, одна из которых перпендикулярна ее плоскости.

Литература

3. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика – М.: Наука. Физматлит, 1998.
4. Иродов И.Е. Механика. Основные законы – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

1. Введение

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания около неподвижной оси, не совпадающей с центром масс маятника.

Если сообщить маятнику толчок или, отведя его в сторону отпустить, то он начнет совершать колебания около положения равновесия. Время, за которое маятник совершает движение из одного крайнего положения в другое и возвращается обратно в первоначальное положение, называется периодом колебаний маятника.

Положение маятника в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения φ из положения равновесия. Величина наибольшего угла отклонения маятника из положения равновесия называется угловой амплитудой колебаний.

При малых колебаниях (угловая амплитуда колебаний не превышает нескольких градусов) период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \quad (1)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси подвеса, m – масса маятника, g – ускорение свободного падения, a – расстояние между осью подвеса и центром масс маятника.

Частным случаем физического маятника является математический маятник. Так называется идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити длиной l , на одном конце которой подвешено тело – материальная точка массы m . В случае математического маятника $a = l$, $I = ml^2$ и формула (1) принимает вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), заключаем, что физический маятник массы m колеблется так же, как математический той же массы и длины

$$l_{np} = \frac{I}{ma}. \quad (3)$$

Величина l_{np} называется приведенной длиной физического маятника. С использованием определения приведенной длины формулу для периода малых колебаний физического маятника можно представить в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}. \quad (4)$$

Точка K на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс C , лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника (см. рис. 1). Можно показать, что приведенная длина $l_{пр}$ всегда больше a . Следовательно, точка подвеса и центр качания лежат по разные стороны от центра масс.

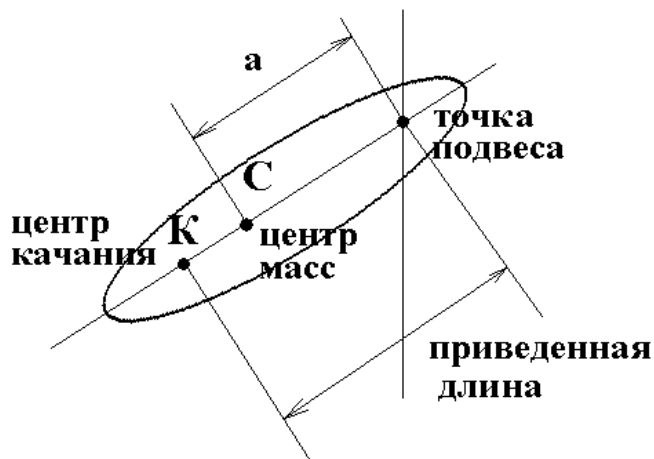


Рис. 1

Точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания. Следовательно, при переносе точки подвеса в центр качания период колебаний маятника остается прежним. Это положение называется теоремой Гюйгенса.

Таким образом, если подобрать у физического маятника такие несимметричные относительно центра масс положения двух параллельных осей подвеса, чтобы период колебаний относительно них был одинаков, то расстояние между этими осями будет равно приведенной длине физического маятника. Измерив это расстояние и период колебаний, можно по формуле (4) найти ускорение свободного падения g .

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Общий вид установки представлен на рис. 2. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, с помощью которых выравливается прибор. В основании закреплена колонка 3, на которой зафиксирован верхний кронштейн 4 и нижний кронштейн 5 с фотоэлектрическим датчиком 6. Ослабив винт 7, верхний кронштейн можно повернуть вокруг колонки и закрепить тем же винтом в любом положении. На вмонтированных вкладышах верхнего кронштейна находится оборотный маятник 8. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком также можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в нужном положении. Фотоэлектрический датчик соединен с миллисекундомером.

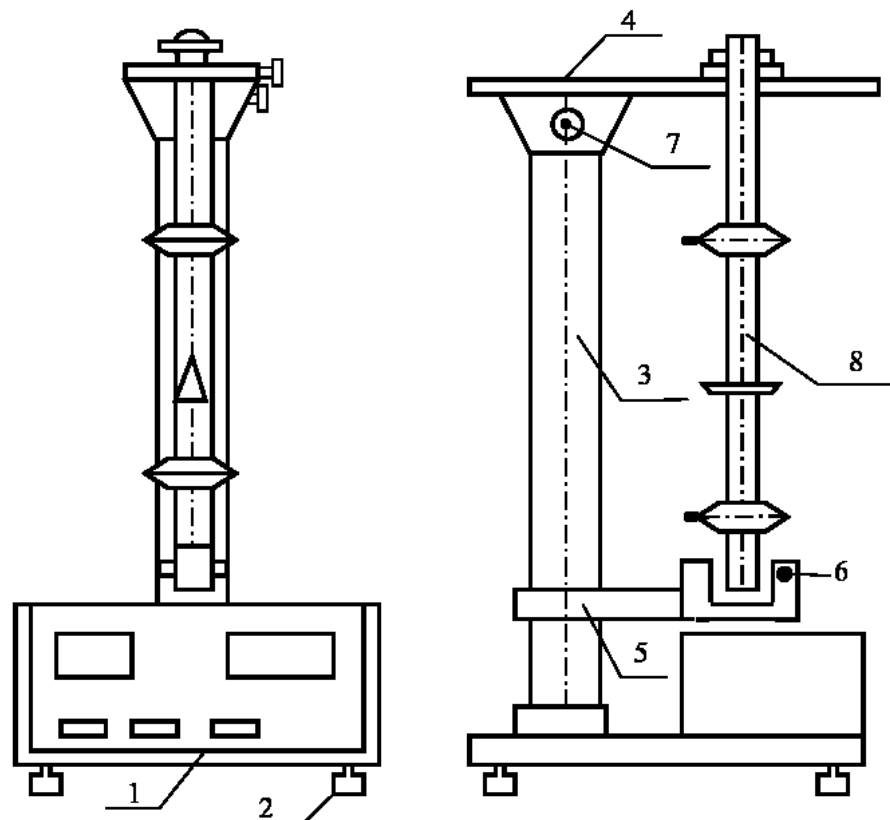


Рис. 2

Оборотный маятник состоит из стального стержня, снабженного двумя опорными призмами A_1 и A_2 и двумя тяжелыми грузами $Ч_1$ и $Ч_2$, которые будем называть чечевицами (рис. 3).

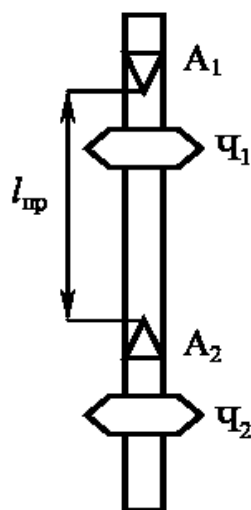


Рис. 3

Призмы могут закрепляться в любом месте маятника. Риски, нанесенные на стержне маятника через 10 мм, служат для точного определения расстояния между призмами. При расположении одной из чечевиц между призмами достаточно знать, что толщина чечевицы 20 мм.

В процессе измерения находят такое положение призм и чечевиц, при котором маятник, подвешенный на одном и другом упорах, колеблется с одинаковым периодом. Однако добиться полного совпадения периодов колебания около обеих осей чрезвычайно трудно. Но этого можно и не делать.

Если расстояние между лезвиями призм L , а истинный период маятника, имеющего такую приведенную длину T , то в действительности мы при наблюдении колебаний около обеих осей получим несколько различные периоды T_1 и T_2 , которым будут соответствовать некоторые приведенные длины L_1 и L_2 , отличающийся от L . Напишем соответствующие соотношения:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (5)$$

Возведя в квадрат и деля последнее равенство на каждое из предыдущих, найдем:

$$LT_1^2 = L_1T^2 \quad \text{и} \quad LT_2^2 = L_2T^2. \quad (6)$$

Обозначим a_1 и a_2 расстояние центра масс маятника от осей качания. Согласно теореме Штейнера, момент инерции I тела относительно любой оси равен сумме момента инерции I_0 относительно параллельной оси, проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями. Используя теорему Штейнера, напишем для приведенных длин L_1 и L_2 следующие соотношения:

$$L_1 = \frac{I_1}{ma_1} = \frac{I_0 + ma_1^2}{ma_1} = \frac{I_0}{ma_1} + a_1,$$

$$L_2 = \frac{I_2}{ma_2} = \frac{I_0 + ma_2^2}{ma_2} = \frac{I_0}{ma_2} + a_2,$$

подставив эти значения L_1 , L_2 и $L = a_1 + a_2$ в равенства (6), получим:

$$(a_1 + a_2)T_1^2 = \left(a_1 + \frac{I_0}{ma_1}\right)T^2; \quad (a_1 + a_2)T_2^2 = \left(a_2 + \frac{I_0}{ma_2}\right)T^2.$$

Исключая отсюда $\frac{I_0}{m}$, получим

$$a_1T_1^2 - a_2T_2^2 = (a_1 - a_2)T^2,$$

откуда

$$T^2 = \frac{a_1T_1^2 - a_2T_2^2}{a_1 - a_2} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}. \quad (7)$$

Решим равенство (4) относительно g и подставим в него полученное значение T , после очевидных преобразований получим

$$g = \frac{8\pi^2 L}{T_1^2 + T_2^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \cdot \frac{L}{a_1 - a_2}}. \quad (8)$$

Формула (8) называется уравнением Бесселя. Оно позволяет достаточно просто и с необходимой степенью точности найти величину ускорения свободного падения при приближенном равенстве периодов колебаний обратного маятника.

Если T_1 и T_2 близки друг к другу (различаются не более чем на 1%), а величины a_1 и a_2 значительно (в 1,5 – 3 раза) отличаются одна от другой, то погрешность определения g можно рассчитать по формуле

$$\delta g = g \sqrt{(\delta L/L)^2 + 4(\delta T/T)^2}, \quad (9)$$

где $T \approx T_1 \approx T_2$, а $\delta T = \delta T_1 = \delta T_2$.

3. Порядок выполнения работы

1. Расположить опорные призмы A_1 и A_2 на одинаковом расстоянии от концов стержня (не менее 11 см). Измерить расстояние между A_1 и A_2 .
2. Одна из чечевиц закрепляется между опорными призмами на расстоянии 10 – 15 см от опорной призмы A_1 (см. рис. 3).
3. Вторая подвижная чечевица располагается ниже призмы A_2 на расстоянии 8 см (по ее середине) от свободного конца стержня.
4. Установить маятник на вкладыше верхнего кронштейна, выровнять стержень маятника по оси стойки
5. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком переместить так, чтобы стержень маятника пересекал оптическую ось.
6. Включить электрическое питание маятника.
7. Отклонить маятник от положения равновесия на $4 - 5^\circ$ и отпустить.
8. Нажать кнопку СБРОС.
9. Измерить время 10 полных колебаний маятника и записать в таблицу (чтобы измерить время 10 полных колебаний маятника, необходимо нажать кнопку СТОП, когда на табло периодов будет число 9).
10. Вычислить период колебаний $T_1 = t_1 / N_1$.
11. Установить маятник на призме A_2 и повторить измерения периода колебаний T_2 при том же положении подвижной чечевицы.
12. Опустив подвижную чечевицу на 1 см, определить периоды колебаний T_1 и T_2 тем же способом. Подобные измерения провести при каждом перемещении чечевицы на 1 см до тех пор, пока периоды T_1 и T_2 будут совпадать с точностью не хуже 1%.
13. Снять маятник с консоли и расположить его на специальной подставке, имеющей острую грань. Найти положение центра масс и измерить расстояния a_1 и a_2 от него до опорных призм.

14. По результатам измерений вычислить ускорение свободного падения и оценить погрешность измерений.

Таблица

№ опыта	1	2	3	4	5
$t_1, \text{с}$					
N_1					
$T_1, \text{с}$					
$t_2, \text{с}$					
N_2					
$T_2, \text{с}$					
$a_1, \text{мм}$					
$a_2, \text{мм}$					

Результат эксперимента

$$g =$$

Контрольные вопросы

1. Дать определение физического и математического маятников. Указать связь между ними.
2. Вывести формулу периода колебаний физического маятника, а из нее - математического.
3. Что называется приведенной длиной и центром качания физического маятника?
4. Какой физический маятник называется оборотным? Как выражается его период колебаний?
5. Объясните, какую роль играет перемещение подвижной чечевицы в поисках периода колебаний оборотного маятника.
6. Найдите приведенную длину и период колебаний физического маятника, представляющего собой однородный стержень длиной l и массой m , подвешенный за один из своих концов.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика – М.: Наука. Физматлит, 1998.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

1. Введение

Рассмотрим движение шара по горизонтальной плоскости без проскальзывания. И шар, и плоскость будем считать абсолютно недеформируемыми. Тогда шар и плоскость соприкасаются в одной геометрической точке. Сообщим шару в горизонтальном направлении (посредством удара, например) скорость v_0 . На шар и до, и после удара действуют только две силы: сила тяжести mg и сила реакции опоры (плоскости качения) N , причем $N = -mg$. Движение шара с постоянной скоростью v_0 в описываемом мысленном эксперименте продолжалось бы бесконечно долго, так как отсутствует сила, действующая на шар в горизонтальном направлении, и, следовательно, нет причины, которая могла бы изменить скорость шара.

Однако, как показывает повседневный опыт, шар, пущенный по горизонтальной плоскости с начальной скоростью v_0 , через какое-то время останавливается. Причина этого – наличие силы трения качения, направление которой противоположно направлению скорости движения шара.

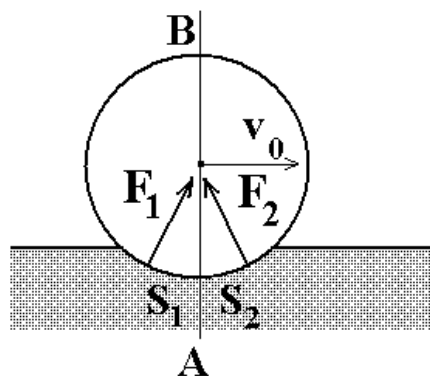


Рис. 1

Возникновение силы трения качения обусловлено взаимной деформацией соприкасающихся тел – шара и плоскости в нашем случае. Схематически это изображено на рис.1. Вследствие силы тяжести, приложенной к шару, деформируется как сам шар, так и плоскость, по которой он катится. Степень деформации шара и плоскости зависит от силы тяжести шара, и от упругих свойств материалов, из которых сделаны соприкасающиеся тела. В результате шар и плоскость будут соприкасаться не в одной геометрической точке, а частью своих поверхностей S_1 и S_2 . Через F_1 и F_2 обозначим равнодействующие сил, с которыми деформированные участки плоскости

качения шара, находящиеся по разные стороны вертикальной плоскости АВ, проходящей через центр шара, действуют на деформированный шар.

Пусть деформация плоскости и катящегося по ней без проскальзывания шара является упругой деформацией. Это означает, что соприкасающиеся тела полностью восстанавливают свою форму и размеры после прекращения взаимодействия. Тогда деформации шара и плоскости будут симметричны относительно упомянутой плоскости и силы F_1 и F_2 будут равны по величине, и их направления составят равные углы с вертикальной осью.

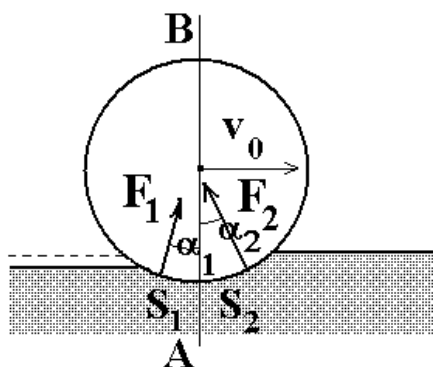


Рис. 2

Рассмотрим теперь случай упругой деформации шара и неупругой деформации плоскости качения. Легко представить конкретный пример, иллюстрирующий этот случай: тяжелый металлический шар катится по асфальту. Схематическое изображение этого случая дано на рис. 2. Вследствие неполного восстановления деформированной плоскости качения картина, изображенная на рисунке, не имеет осевой симметрии. Из рисунка, например, видно, что уровни поверхности плоскости качения до и после того, как по ней прокатится шар, различаются. Поэтому можно предположить, что площади поверхностей соприкосновения шара и плоскости качения по обе стороны плоскости вертикальной плоскости, проходящей через центр шара, будут неодинаковы: $S_1 < S_2$. Как следствие этого, сила F_2 больше по величине силы F_1 . По той же причине углы разные. Следовательно, в рассматриваемом случае горизонтальная составляющая суммы сил F_1 и F_2 не равна нулю.

В настоящей работе используется металлический шар и металлическая плоскость качения. Сравнительно маленькая масса шара и упругие свойства металлов, из которых сделаны шар и плоскость качения, – причина малой, практически не заметной для визуального наблюдения, деформации шара и плоскости качения при проведении эксперимента.

Согласно закону, установленному Кулоном, сумму горизонтальных составляющих F_1 и F_2 , которую и называют силой трения качения, можно представить следующей формулой

$$F_{mp} = k \frac{N}{R}, \quad (1)$$

где N – нормальная составляющая силы реакции опоры, действующей на шарик со стороны поверхности, R – радиус шарика. Коэффициент k называется коэффициентом трения качения. Значения k для различных пар соприкасающихся тел подлежат экспериментальному определению.

2. Экспериментальная установка и методика измерений

В настоящей работе коэффициент трения качения экспериментально определяется с помощью наклонного маятника. Его принципиальная схема изображена на рис. 3 в двух проекциях. Конструктивно наклонный маятник – это шарик радиуса 10 мм, прикрепленный к свободному концу нити и лежащий на поверхности наклонной плоскости. Другой конец нити закреплен. Маятник может совершать колебания, при которых шарик катается по наклонной плоскости.

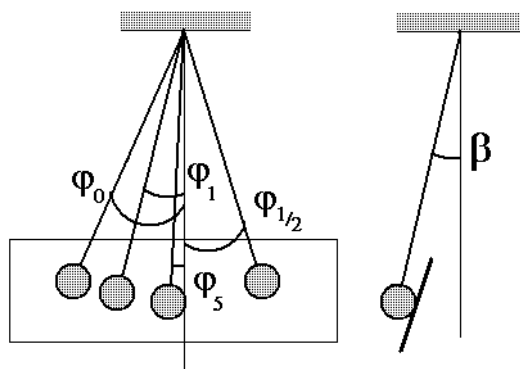


Рис. 3

Из-за силы трения качения колебания маятника являются затухающими. Энергия колебаний расходуется на работу против силы трения. Пусть максимальный угол отклонения нити маятника от положения равновесия в начальный момент времени φ_0 , а после n колебаний – φ_n . Соответствующие этим отклонениям высоты шарика над его положением равновесия обозначим h_0 и h_n . При этом убыль энергии колебаний составит

$$\Delta E = mg(h_0 - h_n), \quad (2)$$

где m – масса шарика, g – ускорение свободного падения. Высоты h_0 и h_n можно выразить через длину нити l , углы φ_0 , φ_n и угол β наклона маятника

$$h_0 = l(1 - \cos \varphi_0) \cos \beta, \quad h_n = l(1 - \cos \varphi_n) \cos \beta. \quad (3)$$

Для малых углов φ можно принять

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}. \quad (4)$$

С учетом выражений (3) и (4) формула (2) примет вид

$$\Delta E = \frac{1}{2} mgl(\varphi_0^2 - \varphi_n^2) \cos \beta. \quad (5)$$

С другой стороны работа против силы трения на пути s равна

$$A = F_{mp} s. \quad (6)$$

За первую половину периода после начала колебаний шарик проходит путь $2l\varphi_0$, за вторую – путь $2l\varphi_{1/2}$, за третью – путь $2l\varphi_1$, и т.д., а за последнюю половину периода n -го колебания – путь $2l\varphi_n$. Поскольку углы максимального отклонения маятника от положения равновесия при наличии силы трения качения уменьшаются по закону арифметической прогрессии, то путь пройденный шариком за n колебаний

$$s = 2l(\varphi_0 + \varphi_{1/2} + \varphi_1 + \dots + \varphi_n) = 2nl(\varphi_0 + \varphi_n). \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в формулу (6) получим

$$A = 4nl(\varphi_0 + \varphi_n) F_{mp}. \quad (8)$$

В соответствии с законом сохранения энергии $\Delta E = A$ или с учетом выражений (5) и (8)

$$\frac{1}{2} mgl(\varphi_0^2 - \varphi_n^2) \cos \beta = 2nl(\varphi_0 + \varphi_n) F_{mp}. \quad (9)$$

Отсюда находим

$$F_{mp} = \frac{mg(\varphi_0 - \varphi_n) \cos \beta}{4n}. \quad (10)$$

Сила реакции опоры равна

$$N = mg \sin \beta. \quad (11)$$

Подставив выражения (10) и (11) в (1), получим

$$\varphi_0 - \varphi_n = \frac{4k}{R} n \operatorname{tg} \beta. \quad (12)$$

При фиксированном n разность $\varphi_0 - \varphi_n$ является линейной функцией $\operatorname{tg} \beta$, угловой коэффициент которой равен $\frac{4nk}{R}$. В работе проверяется эта зависимость и определяется k .

3. Порядок выполнения работы

3. Установить угол наклона плоскости качения маятника $\beta = 20^\circ$.
4. Включить миллисекундомер нажатием тумблера СЕТЬ; на цифровых табло миллисекундомера должны загореться нули.
5. Выбрать произвольное значение начальной амплитуды колебаний φ_0 так, чтобы оно совпало с одним из делений шкалы плоскости качения шарика. Кроме того, оно должно удовлетворять условию $\varphi_0 \ll 1$.
6. Определить угол отклонения нити наклонного маятника φ_5 после 5 полных колебаний и время t_5 пяти колебаний. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- отвести шарик наклонного маятника на предварительно выбранный угол φ_0 ;
 - нажать клавишу СБРОС;
 - отпустить шарик, предоставив его самому себе; проходя положение равновесия, шарик прерывает световой поток светодатчика, и электронный миллисекундомер начинает автоматически отсчитывать время и число полных колебаний маятника;
 - после $n = 4$ полных колебаний маятника нажать клавишу СТОП; электронное устройство автоматически остановит миллисекундомер после $n = 5$ полных колебаний и сохранит на табло время t_5 пяти колебаний;
 - определить визуально угол φ_5 и занести его в таблицу.
7. Повторить еще четыре раза измерение угла φ_5 и найти его среднее значение $\overline{\varphi_5}$ и разность $\varphi_0 - \overline{\varphi_5}$.
 8. Для двух новых значений угла φ_0 повторить измерения углов φ_5 . По результатам трех измерений $\varphi_0 - \overline{\varphi_5}$ найти среднее значение $\overline{\varphi_0 - \overline{\varphi_5}}$.
 9. Повторить все измерения для других значений углов наклона плоскости качения $\beta = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$ и $\beta = 50^\circ$.
 10. Построить график зависимости $\overline{\varphi_0 - \overline{\varphi_5}}$ от $\text{tg}\beta$. Найти угловой коэффициент $\frac{20k}{R}$ прямой, проходящей через экспериментальные точки и оценить погрешность его определения.
 11. Вычислить коэффициент трения качения и его погрешность.

Таблица

β	φ_0 , рад	φ_5 , рад					$\overline{\varphi_5}$, рад	$\varphi_0 - \overline{\varphi_5}$ рад	$\overline{\varphi_0 - \overline{\varphi_5}}$ рад
20°									
30°									
40°									
50°									

Результат эксперимента

$$k =$$

Контрольные вопросы

5. Указать физические причины возникновения силы трения качения.
6. В каких единицах измеряется коэффициент трения качения?
7. Колеса какого диаметра предпочтительнее для езды по грунтовой дороге?
8. Почему подшипники качения делают из твердых сплавов?
9. На горизонтальном диске лежат шарик и кубик из одного материала и одинакового веса. Диск начинает вращаться, постепенно увеличивая угловую скорость. Какой из предметов будет дольше оставаться на диске? Почему?

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Высш. шк., 1986.
2. Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, 1975.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ГАЗА МЕТОДОМ КЛЕМАНА – ДЕЗОРМА

1. Введение

Адиабатическим является процесс, происходящий с термодинамической системой, заключенной в теплоизолирующую оболочку. Однако в опытах с газом такая оболочка, обладая теплоемкостью, во много раз превышающей теплоемкость самого газа, вносит очень большую погрешность в результат измерений. На практике для проведения адиабатических процессов пользуются тем, что давление в газе устанавливается сравнительно быстро – за доли секунды, в то время как для выравнивания температуры требуются минуты. Поэтому процессы, очень близкие к адиабатическим, могут быть осуществлены путем быстрого изменения давления газа.

Уравнение адиабаты идеального газа, называемое также уравнением Пуассона, для зависимости давления p газа от его объема V имеет вид

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (1)$$

где $\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_v . С помощью уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad (2)$$

где m – масса газа, μ – его молярная масса, $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная, T – абсолютная температура, уравнение адиабаты может быть записано в других видах

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (3)$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (4)$$

Поскольку молярные теплоемкости C_p и C_v идеального газа связаны соотношением

$$C_p - C_v = R, \quad (5)$$

называемым уравнением Майера, то зная γ можно найти эти теплоемкости

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad \text{и} \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (6)$$

Согласно классической теории теплоемкости газов

$$C_v = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R, \quad (6)$$

где i – число степеней свободы молекул. С учетом (6)

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \quad (7)$$

Таким образом, зная γ можно определить и число степеней свободы молекул

$$i = \frac{2}{\gamma-1}. \quad (8)$$

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Установка (рис.1) состоит из стеклянного баллона 1; насоса 2, служащего для создания в баллоне избыточного давления воздуха; крана 3, с помощью которого баллон может быть сообщен с атмосферой; крана 4, разобщающего баллон и насос; U-образного водяного манометра, служащего для регистрации разности между давлением воздуха в баллоне и атмосферным давлением. Для измерения промежутков времени, в течение которых открыт кран 3 (баллон сообщен с атмосферой), используется секундомер.

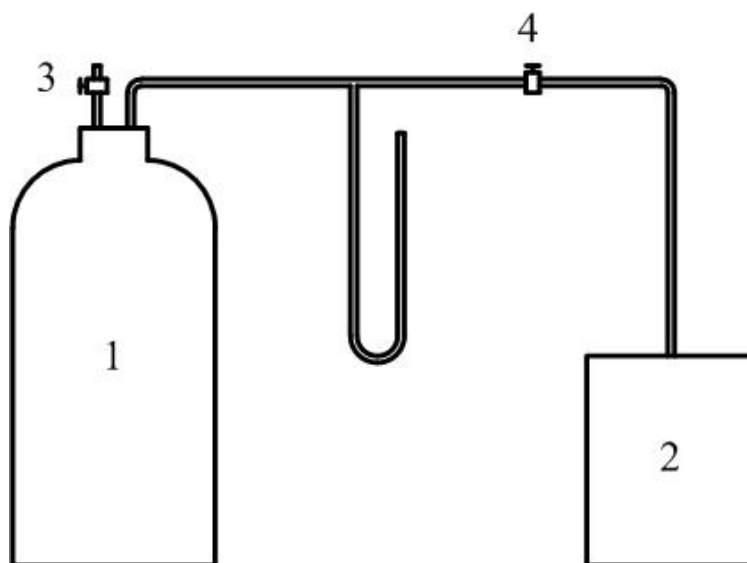


Рис.1

Для определения показателя адиабаты газа (воздуха), находящегося в баллоне, с ним проводят последовательность термодинамических процессов, представленных на диаграмме в координатах p, V (рис.2). Обозначим через p_0, V_0, T_0 начальные значения термодинамических параметров газа в баллоне. Сначала в баллон накачивается газ (процесс 1-2). При этом газ в баллоне сжимается и нагревается. После изохорического остывания до начальной (комнатной) температуры T_0 (процесс 2-3) давление газа p_1 . Затем соединяют баллон с атмосферой и газ адиабатически расширяется (процесс 3-4). Газ при этом охлаждается до температуры $T_1 < T_0$, а его давление падает

до p_0 . В момент достижения давления p_0 баллон отсоединяют от атмосферы и газ изохорически нагревается до комнатной температуры (процесс 4-5). В конечном состоянии давление газа $p_2 > p_0$, а температура T_0 .

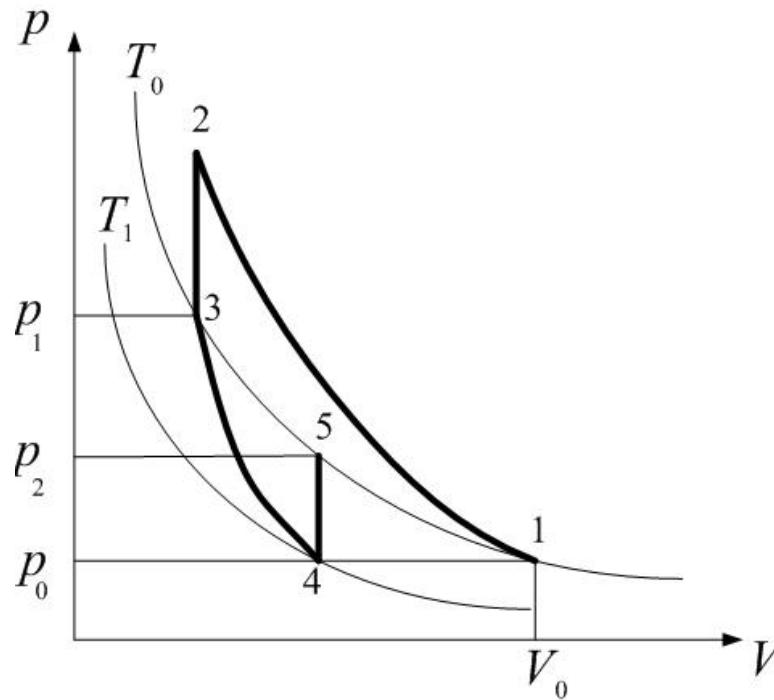


Рис. 2

Для адиабатического процесса 3-4

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\gamma}. \quad (9)$$

Для изохорного процесса 4-5

$$\frac{p_2}{T_0} = \frac{p_0}{T_1}. \quad (10)$$

Исключая с помощью (10) отношение температур T_0/T_1 из (9), получим

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\gamma}. \quad (11)$$

Разрешим это уравнение относительно γ

$$\gamma = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_1/p_0) - \ln(p_2/p_0)}. \quad (12)$$

В нашем случае давления p_1 и p_2 мало отличаются от p_0 и формулу (12) можно упростить. Обозначим $p_1 = p_0 + h_1$, $p_2 = p_0 + h_2$ и разложим логарифмы в степенной ряд, ограничиваясь линейными членами разложения

$$\gamma = \frac{\ln(1 + h_1 / p_0)}{\ln(1 + h_1 / p_0) - \ln(1 + h_2 / p_0)} \approx \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (13)$$

При желании можно вычислить следующий член ряда и оценить величину ошибки, возникающей при использовании формулы (13).

3. Порядок выполнения работы

При выводе формулы (12) предполагалось, что в процессе 3-4 кран должен быть перекрыт в момент, когда давление в баллоне станет равным атмосферному, а время Δt , и течение которого давление уменьшалось от p_1 до p_0 , достаточно мало, чтобы теплообменом с окружающей средой можно было пренебречь. Практически эти условия выполнить трудно. Поэтому рекомендуется следующий порядок измерений.

1. Накачать насосом воздух в баллон до давления, превышающее атмосферное на 20 – 25 см вод. ст. Выждать не менее двух минут, пока температура воздуха в баллоне и окружающем пространстве не станут одинаковыми. Измерить установившееся значение величины h_1 и записать его в таблицу.
2. На короткое время Δt открыв кран соединить баллон с атмосферой и снова его закрыть. Выждав время не менее двух минут, необходимое для выравнивания температур, измерить показания манометра h_2 . Рекомендуется провести серию из 5 измерений при $\Delta t = 3$ с.
3. Аналогично провести измерения для $\Delta t = 6, 9, 12, 15$ с.
4. По полученным данным вычислите γ для каждого опыта и среднее значение $\bar{\gamma}$ для каждого Δt .
5. Окончательный результат следует получить экстраполяцией зависимости $\bar{\gamma}$ от Δt к значению $\Delta t = 0$. Эту процедуру удобно провести, строя график функции $\bar{\gamma}(\Delta t)$ в координатах $(\ln \bar{\gamma}, \Delta t)$. Оцените ошибку измерений.

Таблица

$\Delta t, \text{ с}$	$h_1, \text{ мм}$	$h_2, \text{ мм}$	γ	$\bar{\gamma}$
3				
6				
9				
12				
15				

Результат эксперимента

$$\gamma =$$

Контрольные вопросы

1. Какой процесс называется адиабатическим?
2. Выведите уравнение адиабаты идеального газа.
3. Дайте определение молярной теплоемкости.
4. Чему равны молярные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении?
5. Как определяется число степеней свободы молекул?

Литература

1. Иродов И.Е. Физика макросистем, Основные законы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 3. Молекулярная физика и термодинамика. – М.: Наука. Физматлит. 1998.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ПО СКОРОСТИ ЗВУКА В ГАЗЕ

1. Введение

В газах и жидкостях звук распространяется в виде объемных волн сжатия–разрежения. Скорость звука определяется плотностью и упругими свойствами среды

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho}}, \quad (1)$$

где ρ – плотность, κ – коэффициент сжимаемости, выражающий относительное уменьшение объема вещества при увеличении давления на единицу

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}. \quad (2)$$

Но объем V зависит не только от давления P , но и от температуры T . Поэтому нужно указать в каком смысле понимается производная dV/dP . В звуковой волне сжатия и разрежения сменяют друг друга настолько быстро, что температура не успевает выравняться. Процессы, происходящие без теплообмена, называются адиабатическими, так что распространение звука можно считать адиабатическим процессом. В таком случае

$$\frac{dV}{dP} = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{ad} \quad (3)$$

и, следовательно, скорость звука определяется адиабатической сжимаемостью.

Для идеального газа адиабатический процесс описывается уравнением Пуассона

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (4)$$

где $\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты, C_p и C_v – теплоемкости при постоянном давлении и объеме. Дифференцируя уравнение (4) получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{ad} = -\frac{V}{\gamma P}. \quad (5)$$

Следовательно, адиабатический коэффициент сжимаемости идеального газа равен

$$\kappa = \frac{1}{\gamma P}, \quad (6)$$

а скорость звука

$$v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}. \quad (7)$$

Согласно уравнению состояния идеального газа

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT, \quad (8)$$

где μ – молярная масса, $R = 8,314$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная. С учетом (8) формула (7) принимает вид

$$v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \quad (9)$$

На измерении скорости звука основан один из наиболее точных методов определения показателя адиабаты газа. Преобразуя формулу (9), найдем

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} v_{зв}^2. \quad (10)$$

Таким образом, для определения показателя адиабаты достаточно измерить температуру газа и скорость распространения звука (молярная масса предполагается известной).

2. Экспериментальная установка и методика измерений

В работе измеряется скорость звука методом стоячих волн, образующихся в столбе газа, заключенного в трубе. Один конец трубы закрыт поршнем, у другого расположена мембрана динамика. Поршень, снабженный миллиметровыми делениями, передвигается вдоль трубы с помощью штока (см. рис. 1). Колебания воздуха в трубе возбуждаются под действием мембраны динамика, питающегося от генератора электрических колебаний звуковых частот. При колебаниях мембраны по трубе распространяется звуковая волна, которая интерферирует с волной, отраженной от поверхности поршня. Если частота колебаний мембраны совпадает с одной из частот собственных колебаний воздушного столба (явление резонанса), в трубе устанавливаются стоячие звуковые волны. При этом все точки воздушного столба совершают гармонические колебания (в направлении вдоль столба) переменной амплитуды с одинаковой частотой, одновременно достигая максимума смещения и синхронно проходя через положения равновесия.

Уравнение стоячей волны имеет вид

$$\xi = A \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad (11)$$

где ξ – смещение некоторой частицы среды от равновесного положения в точке с координатой x в момент времени t , $|A \cos kx|$ – амплитуда колебаний, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $\omega = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота, а ν – частота колебаний. Закон, по которому меняются скорости частиц $\dot{\xi}$ и деформация среды ε , получается после дифференцирования уравнения (11) по времени t и координате x

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \sim \cos kx \cdot \sin \omega t, \quad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \sim \sin kx \cdot \cos \omega t . \quad (13)$$

Избыточное давление ΔP , возникающее в некоторой точке среды, пропорционально деформации. Поэтому уравнение для него будет иметь вид $\Delta P \sim \sin kx \cdot \cos \omega t$. (14)

У поверхности колеблющейся мембраны образуется максимум смещения и скорости (пучность), а слой газа, прилегающий к поршню, не испытывает смещения (узел смещения и скорости). Узлам смещения соответствуют пучности давления и, наоборот, пучностям смещения – узлы давления. Одно из возможных распределений узлов и пучностей стоячей волны в трубе показано на рис. 1.

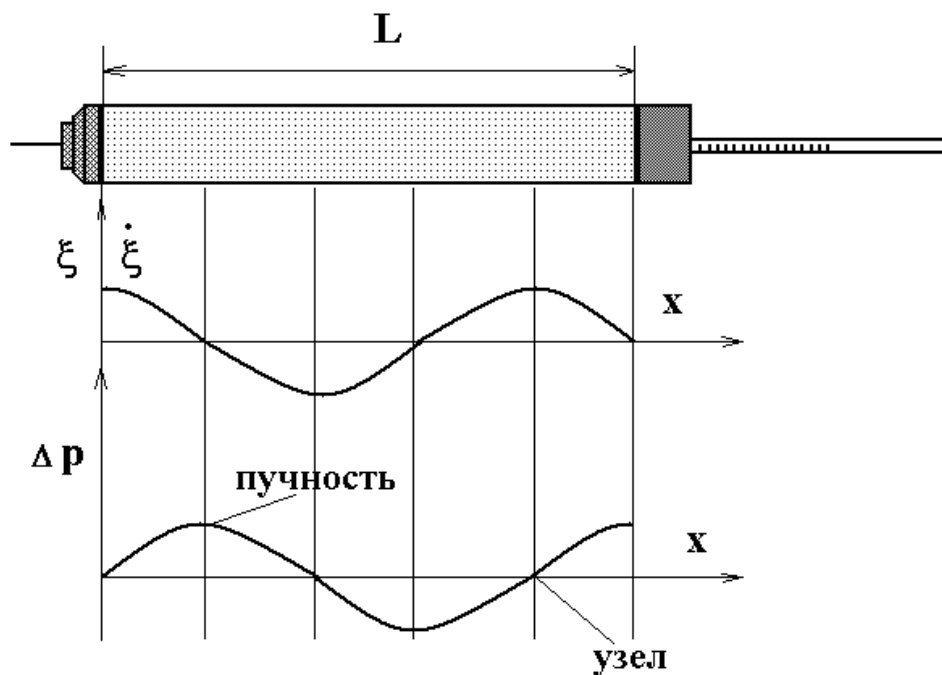


Рис. 1

Из этого рисунка видно, что при данной частоте колебаний ν мембраны динамика на длине столба L_n может разместиться нечетное число $(2n-1)$ четвертей длин волн λ . Длина звуковой волны λ связана с ее частотой ν и скоростью распространения $v_{зв}$ соотношением

$$\lambda = \frac{v_{зв}}{\nu} . \quad (15)$$

Какую бы частоту колебаний мембраны мы ни задали, в трубе образуется стоячая волна при условии, что

$$L_n = \frac{2n-1}{4} \cdot \frac{v_{зв}}{\nu} , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Отсюда следует, что для фиксированной частоты ν экспериментальные точки $\{(2n-1)/4, L_n\}$ лежат на прямой, угловой коэффициент которой равен $v_{зв}/\nu$.

3. Порядок выполнения работы

1. Записать в таблицу температуру воздуха, при которой проводятся измерения.
2. Включить генератор звуковых частот и установить частоту колебаний, указанную преподавателем, записав ее в таблицу.
3. Перемещая поршень в направлении от мембраны динамика, произвести отсчеты L_n пяти последовательных его положений, при которых возникает резонанс. Результаты записать в таблицу.
4. Повторить измерения L_n не менее трех раз и определить координаты положений поршня как средние арифметические значения этих отсчетов.
5. Построить график зависимости L_n от числа $(2n-1)/4$. Найти угловой коэффициент v_{36}/v прямой, проходящей через экспериментальные точки, и оценить погрешность $\delta(v_{36}/v)$ определения этого коэффициента.
6. Вычислить скорость звука v_{36} в воздухе и оценить погрешность δv_{36} ее определения.
7. Рассчитать показатель адиабаты γ воздуха и его погрешность $\delta\gamma$. Молярную массу воздуха принять равной 29,2 г/моль. Погрешности числовых значений μ и R не учитывать.

Таблица

$T =$

$v =$

n	1	2	3	4	5
$(2n-1)/4$	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25
$L_{1n}, \text{ м}$					
$L_{2n}, \text{ м}$					
$L_{3n}, \text{ м}$					
$L_{4n}, \text{ м}$					
$\bar{L}_n, \text{ м}$					

Результаты эксперимента:

$$v_{36} =$$

$$\gamma =$$

Контрольные вопросы

1. Чем продольная волна отличается от поперечной?

2. Написать уравнение бегущей волны и разъяснить смысл входящих в него величин.
3. По какой траектории движется частица в бегущей продольной волне?
4. Чем определяется скорость звука в воздухе?
5. Как направлены скорости частиц воздуха по обе стороны от пучности давления?
6. Нарисовать распределение давления по оси трубы с открытыми торцами в случае, если мембрана звукового генератора расположена посередине трубы.

Литература

8. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 4. Волны. Оптика – М.: Наука. Физматлит, 1998.
9. Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ ПО МЕТОДУ СТОКСА

1. Введение

Вязкостью или внутренним трением в качественном смысле называется свойство текучих тел (жидкостей или газов) оказывать сопротивление перемещению одних их частей относительно других. Возникновение сопротивления, обусловленного вязкостью жидкости, существенно зависит от вида течения жидкости. Различают два вида течения жидкостей: ламинарное и турбулентное.

Ламинарное течение – упорядоченное течение жидкости, при котором она перемещается как бы слоями, параллельными направлению течения. Ламинарное течение наблюдается или у очень вязких жидкостей, или при течении, происходящем с достаточно малой скоростью, а также при медленном обтекании жидкостью тел. В частности, ламинарные течения имеют место в узких (капиллярных) трубках, в слое смазки в подшипниках, в тонком пограничном слое, образующемся вблизи поверхности тел при обтекании их жидкостью и др. С увеличением скорости движения жидкости ламинарное течение в некоторый момент переходит в турбулентное течение.

Турбулентное течение – форма течения жидкости, при которой частицы жидкости совершают неустановившиеся движения по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемешиванию между слоями жидкости. Наиболее детально изучены турбулентные течения в трубах, каналах, пограничных слоях около обтекаемых жидкостью твердых тел, а также так называемые свободные турбулентные течения – струи, следы за движущимися относительно жидкости твердыми телами и зоны перемешивания между потоками разной скорости, не разделенными какими-либо твердыми телами.

Вид течения жидкости определяет все его свойства, в частности структуру потока, профиль скоростей, закон сопротивления. Возникновение сопротивления при ламинарном течении жидкости, объясняется следующим образом. Представим себе две пластинки, разделенные плоскопараллельным слоем жидкости (рис. 1).

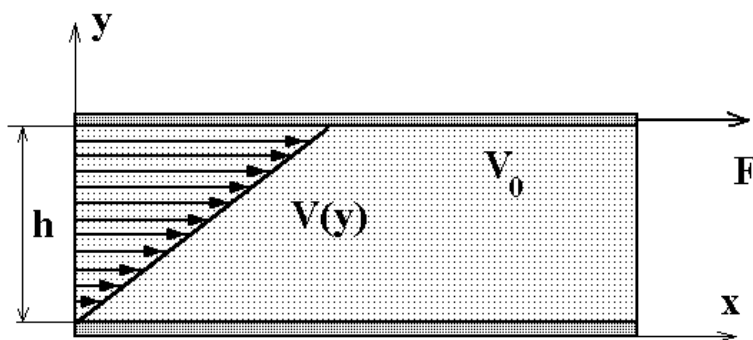


Рис. 1.

Рассмотрим, что произойдет, если начать перемещать верхнюю пластинку относительно нижней в направлении, указанном стрелкой. Мысленно разобьем жидкость на тончайшие слои. Молекулы жидкости, ближайšie к верхней пластинке, прилипают к ней и в силу этого начинают перемещаться вместе с пластинкой с той же скоростью. Эти молекулы в свою очередь увлекают молекулы следующего слоя и т. д. Слой молекул, непосредственно прилегающий к нижней неподвижной пластинке, остается в покое, а остальные слои перемещаются, скользя друг по другу со скоростями тем большими, чем больше их расстояние от нижнего слоя.

Вязкость жидкости проявляется в возникновении силы, препятствующей относительно сдвигу соприкасающихся слоев жидкости, а следовательно, и сдвигу пластинок относительно друг друга. Величина сопротивления, обусловленного вязкостью жидкости, зависит от разности скоростей между ее слоями и расстояния между ними. Чем больше меняется скорость жидкости при переходе от слоя к слою, тем больше величина вязкого сопротивления. Предел отношения изменения скорости Δv двух слоев жидкости к расстоянию Δy между этими слоями при стремлении последнего к нулю

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

называется градиентом скорости, а точнее проекцией градиента скорости на ось y . Основной закон вязкого течения был установлен Ньютоном. При ламинарном течении модуль силы внутреннего трения пропорционален градиенту скорости:

$$F = \eta S \frac{dv}{dy} \quad (2)$$

или

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (3)$$

где F – абсолютное значение силы внутреннего трения, S – площадь поверхности скользящих друг по другу слоев, η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы жидкости, называемый коэффициентом внутреннего трения или динамической вязкостью (а часто просто вязкостью). Величина $\tau = F/S$ называется касательным напряжением.

В СИ единица динамической вязкости выражается в $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ или $\text{Па} \cdot \text{с}$ (паскаль-секунда).

Вязкость жидкостей зависит существенно от ее природы и температуры; с повышением температуры она резко уменьшается. Так, например, вязкость касторового масла при изменении температуры от 18 до 40°C падает почти в четыре раза.

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Существует ряд методов определения коэффициента внутреннего трения. Один из них, используемый в данной работе, основан на том, что твердое тело при движении в жидкости испытывает сопротивление. Это объясняется тем, что вследствие молекулярного взаимодействия поверхность тела обволакивается частицами жидкости, образующими пленку. Эта пленка движется вместе с телом и испытывает трение о соседний слой жидкости, что и тормозит движение тела. Таким образом, сопротивление возникает в результате внутреннего трения между пленкой жидкости, прилипшей к телу, и соседним слоем.

Стокс исследуя падение небольших тел сферической формы в жидкостях, установил закон, определяющий силу сопротивления F_c , испытываемую твердым шариком при его медленном поступательном движении в неограниченной вязкой жидкости:

$$F_c = 6\pi\eta v \quad (4)$$

где r – радиус шарика, v – его скорость. Эта формула может быть использована для определения коэффициента η вязкости жидкости.

Вискозиметр для определения вязкости по методу Стокса представляет собой стеклянный цилиндрический сосуд, наполненный исследуемой жидкостью (рис.2). На шарик, свободно падающий в этой жидкости, действуют сила тяжести P , выталкивающая сила (сила Архимеда) F_A и сила вязкого сопротивления F_c , установленная Стоксом:

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g; F_c = 6\pi\eta v; F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g. \quad (5)$$

Здесь m – масса шарика, ρ и ρ_0 – плотности шарика и жидкости, g – ускорение свободного падения.

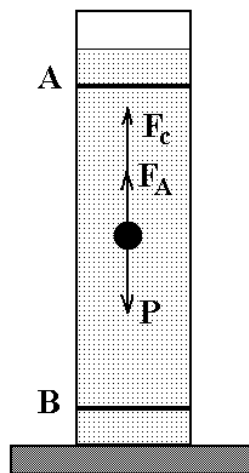


Рис. 2.

Движение шарика, падающего в вязкой жидкости, лишь в первое время будет ускоренным. С возрастанием скорости возрастает сила вязкого сопротивления и с некоторого момента времени движение можно считать равномерным, т. е. справедливо равенство

$$P = F_A + F_c \quad (6)$$

или

$$6\pi\eta v = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_0), \quad (7)$$

откуда

$$\eta = \frac{2gr^2}{9v}(\rho - \rho_0). \quad (8)$$

Для средней части сосуда, ограниченной рисками А и В (см. рис. 1), где движение равномерное, скорость равна

$$v = h/t, \quad (9)$$

где h - расстояние, а t - время падения шарика между рисками А и В. Подставляя выражение (9) в (8) и учитывая, что диаметр шарика $d = 2r$, получим расчетную формулу

$$\eta = \frac{gtd^2}{18l}(\rho - \rho_0). \quad (10)$$

В лабораторной работе определяется вязкость касторового масла, плотность которого $\rho_0 = 0,96 \text{ г/см}^3$. Плотность стальных шариков $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$.

3. Порядок выполнения работы

1. Измерить расстояние h между кольцами А и В на цилиндре масштабной линейкой.
2. Измерить с помощью штангенциркуля диаметр d шарика.
3. Определите время t падения шарика между рисками А и В. Для этого опустите шарик в цилиндр; расположите глаза на уровне верхнего кольца А (при этом кольцо должно слиться в прямую линию) и в момент прохождения шарика мимо кольца включите секундомер. К этому времени движение шарика уже будет равномерным. В момент прохождения шарика мимо нижнего кольца В выключите секундомер и запишите время t падения шарика в таблицу.
4. Прodelать опыт с пятью шариками.
5. По формуле (10) вычислить значения коэффициентов внутреннего трения жидкости η в каждом из пяти опытов и записать их в таблицу.
6. По результатам пяти измерений определить среднеарифметическое значение коэффициента внутреннего трения $\bar{\eta}$ для исследуемой жидкости и оценить погрешность его определения.

Таблица

№ опыта	d , мм	t , с	η , Па·с
1			
2			
3			
4			
5			

Результат эксперимента

$$\eta =$$

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте ламинарное и турбулентное движения жидкостей.
2. Дайте определение градиента скорости.
3. Напишите и сформулируйте закон Ньютона для определения силы внутреннего трения при ламинарном течении жидкости.
4. Каков физический смысл коэффициента внутреннего трения η . От чего он зависит и в каких единицах измеряется в СИ?
5. Как возникает сила сопротивления, действующая на движущийся в жидкости шарик?
6. Напишите формулу Стокса и сформулируйте область ее применения.
7. Какие силы действуют в жидкости на падающий шарик? Чему равна каждая из этих сил? Как движется шарик в жидкости, начиная с ее поверхности?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика. – М.: Наука. Физматлит, 1998.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 3. Молекулярная физика и термодинамика. – М.: Наука. Физматлит, 1998.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Единицы физических величин

1.1. Единицы величин в СИ и СГС

Величина	Единица величины		Отношение ед. СИ/ед. СГС
	СИ	СГС	
Длина	м	см	10^2
Время	с	с	1
Скорость	м/с	см/с	10^2
Ускорение	м/с ²	см/с ²	10^2
Угловая скорость	рад/с	рад/с	1
Угловое ускорение	рад/с ²	рад/с ²	1
Масса	кг	г	10^3
Плотность	кг/м ³	г/см ³	10^{-3}
Сила	Н	дин	10^5
Импульс	кг·м/с	г·см/с	10^5
Работа, энергия, количество теплоты	Дж	эрг	10^7
Мощность	Вт	эрг/с	10^7
Момент силы	Н·м	дин·см	10^7
Момент импульса	кг·м ² /с	г·см ² /с	10^7
Момент инерции	кг·м ²	г·см ²	10^7
Частота колебаний	Гц	Гц	1
Круговая частота	с ⁻¹	с ⁻¹	1
Температура	К	К	1
Давление	Па	дин/см ²	10
Теплоемкость, энтропия	Дж/К	эрг/К	10^7
Коэффициент диффузии	м ² /с	см ² /с	10^4
Теплопроводность	Вт/(м·К)	эрг/(см·с·К)	10^5
Динамическая вязкость	Па·с	П	10

1.2. Десятичные приставки к названиям единиц

Э – экса (10^{18})	М – мега (10^6)	д – деци (10^{-1})	н – нано (10^{-9})
П – пета (10^{15})	к – кило (10^3)	с – санти (10^{-2})	п – пико (10^{-12})
Т – тера (10^{12})	г – гекто (10^2)	м – милли (10^{-3})	ф – фемто (10^{-15})
Г – гига (10^9)	да – дека (10)	мк – микро (10^{-6})	а – атто (10^{-18})

1.3. Некоторые внесистемные единицы

1 год = $3,15 \cdot 10^7$ с 1 л = 10^{-3} м ³	1 кал = 4,18 Дж 1 атм = 101,3 кПа	1 бар = 100 кПа 1 мм.рт.ст. = 133,3 Па
---------------------------------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------------

2. Физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Ускорение свободного падения	$g = 9,80665 \text{ м/с}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,380622 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Число Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8,31434 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Нормальное атмосферное давление	$P_n = 1013,25 \text{ гПа}$
Нормальная температура	$T_n = 273,15 \text{ К}$

3. Формулы для вычисления производных

$\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \frac{1}{v^2}$	$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx} [u(v)] = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

4. Греческий алфавит

Α, α – альфа	Η, η – эта	Ν, ν – ню	Τ, τ – тау
Β, β – бэта	Θ, θ – тэта	Ξ, ξ – кси	Υ, υ – ипсилон
Γ, γ – гамма	Ι, ι – йота	Ο, ο – омикрон	Φ, φ – фи
Δ, δ – дельта	Κ, κ – каппа	Π, π – пи	Χ, χ – хи
Ε, ε – эпсилон	Λ, λ – лямбда	Ρ, ρ – ро	Ψ, ψ – пси
Ζ, ζ – дзета	Μ, μ – мю	Σ, σ – сигма	Ω, ω – омега

**Рябов Вячеслав Александрович
Максименко Владимир Викторович
Иванов Владимир Петрович
Куприянов Леонид Юрьевич
Крылов Сергей Юрьевич
Прокофьев Леонид Николаевич
Хафизов Раиф Салихович**

**ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
Лабораторные работы по механике
и молекулярной физике**