Краевая задача с меняющимся направлением времени

Н.В. Кислов, А.В. Червяков

В работе исследуется задача Жевре для уравнения параболического типа в полосе $\Pi = \{(x,t): x \in (-1,1), t \ge 0\}$. Рассмотрены классические решения в классе Липшиц-непрерывных начальных данных. Установлены условия непрерывности производных решения в точке (0,0) в зависимости от гладкости начальных функций.

Рассмотрим в полосе $\Pi = \{(x,t): x \in (-1,1), t \ge 0\}$ следующую задачу:

$$u_t - sign(x)u_{xx} = f(x,t); \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), 0 < x < 1; \tag{2}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, t > 0. \tag{3}$$

Впервые граничное условие вида (2) появилось в работе [1]. Поэтому задачу с граничными условиями такого типа обычно называют задачей Жевре. Ранее в работах [2 и 3] исследовались обобщенные решения задачи Жевре для уравнений первого и второго порядка в конечной области. В работе [4] исследованы классические решения для уравнения (1) в полосе $\Pi=\{(x,t): -\infty < x < \infty,\ 0 < t < T\}$. В этой работе установлены условия повышения гладкости решения в точках (0,0) и (0,T) в классе Липшиц-непрерывных граничных условий.

В данной работе также исследуется гладкость классического решения в точке (0,0). Будем предполагать, что правая часть в (1) принадлежит пространству $L_2(\Pi)$. Кроме того, при выводе основного интегрального уравнения потребуется некоторое дополнительное условие на правую часть асимптотического характера. Предполагается выполненным следующее условие:

$$f(x,t) = O(t^{-\gamma}),\ \gamma > 0,\ x \in (-1,0). \tag{4}$$

Относительно функции $u_0(x)$ в условии (2) потребуем принадлежности её к классу Липшица с некоторой положительной постоянной α, т.е.

$$u(x,0) \in Lip_\alpha(0,1). \tag{5}$$

Решение задачи (1), (2), (3) будем понимать в классическом смысле, т.е. будем считать, что $u(x,t)$ принадлежит следующему классу функций

$$u \in C^{2,1}(\Pi^+ \cup \Pi^-) \cap C^{1,0}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}),$$

где $\Pi^+ = \Pi \cap (0 < x < 1)$; $\Pi^- = \Pi \cap (-1 < x < 0)$. (6)

Введем в рассмотрение неизвестную функцию

$$\psi(t) = u_x(+0,t) = u_x(-0,t). \tag{7}$$

Прежде всего рассмотрим задачу (1), (2), (3) в прямоугольнике $\Pi_T = \{(x,t):$ -1< x <1; 0 < t < T} с дополнительным условием $u(x,T) = 0$ при -1 < x<0. К этой задаче применим преобразование Лапласа. В дальнейшем использованы следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&U^{+} = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-zt}dt,\ 0 < x < 1;\\
&U^{-} = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-zt}dt,\ -1 < x < 0;\\
&F(x,z) = \int_0^{\infty} f(x,t)e^{-zt}dt;\\
&R(x,z) = \begin{cases} u_0(x) + F(x,z), & 0 < x < 1;\\ F(x,z), & -1 < x < 0;\end{cases}\\
&\psi(z) = \int_0^{\infty} \psi(t)e^{-zt}dt;\\
&\varphi(t) = -\psi(T-t);\\
&\Phi(z) = \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-zt}dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Изображение искомой функции можно представить следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned}
&U^{+}(x,z) = \frac{sh\sqrt{z}(1-x)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}}\left(\int_0^1 R(\xi,z)ch\sqrt{z}\xi d\xi - \int_x^1 R(\xi,z)\frac{ch\sqrt{z}sh\sqrt{z}(\xi-x)}{sh\sqrt{z}(1-x)}d\xi - \psi(z)\right);\\
&U^{-}(x,z) = \frac{sh\sqrt{z}(1+x)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}}\left(\int_0^1 R(-\xi,z)ch\sqrt{z}\xi d\xi - \int_{-x}^1 R(-\xi,z)\frac{ch\sqrt{z}sh\sqrt{z}(\xi+x)}{sh\sqrt{z}(1+x)}d\xi - \Phi(z)\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

При x=0 изображения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&U^{+}(0,z) = \int_0^1 R(\xi,z)\frac{sh\sqrt{z}(1-\xi)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}}d\xi - \frac{th\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\psi(z);\\
&U^{-}(0,z) = \int_0^1 R(-\xi,z)\frac{ch\sqrt{z}(1-\xi)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}}d\xi - \frac{th\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\Phi(z);
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

В дальнейшем понадобятся также следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&K_{\xi}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{sh\sqrt{z}(1-\xi)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}}e^{zt}dz;\\
&K_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{th\sqrt{z}}{\sqrt{z}}e^{zt}dz.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Буква L под знаком интеграла здесь и в дальнейшем означает интегрирование вдоль мнимой оси плоскости z. Таким образом, при x=0 получаем представление искомого решения

$$
\left.
\begin{aligned}
u^{+}(0,t) &= -\int_0^t K_0(t-\tau)\psi(\tau)d\tau + \int_0^1 u_0(\xi)K_\xi(t)d\xi + \int_0^1\left(\int_0^t f(\xi,\tau)K_\xi(t-\tau)d\tau\right)d\xi;\\
u^{-}(0,t) &= -\int_t^T K_0(\tau-t)\psi(\tau)d\tau + \int_0^1\left(\int_t^T f(-\xi,T-\tau)K_\xi(\tau-t)d\tau\right)d\xi.
\end{aligned}
\right\} \qquad (12)
$$

Во втором выражении в (12) перейдем к пределу при $T\to\infty$. При этом дополнительно условие (4) обеспечивает нулевое значение предела во втором слагаемом.

Из условия непрерывности искомой функции при x=0 получаем основное интегральное уравнение

$$\int_0^\infty K_0(|t-\tau|)\psi(\tau)d\tau = p(t). \qquad (13)$$

Здесь

$$p(t) = \int_0^1 u_0(\xi) * K_\xi(t)d\xi + \int_0^1\left(\int_0^t f(\xi,\tau)K_\xi(t-\tau)d\tau\right)d\xi. \qquad (14)$$

Интегральное уравнение типа свертки (13) хорошо изучено [5]. Применив стандартную методику для его решения, запишем (13) на всей оси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0\left(|t-\tau|\right)\psi^{+}(t)dt = p^{+}(t) + \psi^{-}(t). \qquad (15)$$

В (15) введены общепринятые обозначения:

$$\psi^{+}(t) = \begin{cases}\psi(t), t\ge 0\\ 0, t\le 0\end{cases} \quad \text{(неизвестная функция);}$$

$$p^{+}(t) = \begin{cases}p(t), t\ge 0\\ 0, t\le 0\end{cases}$$

$$\psi^{-}(t) = \begin{cases}0, t\ge 0\\ \psi(t), t\le 0\end{cases} \quad \text{(неизвестная функция).}$$

К уравнению (15) применяем двустороннее преобразование Лапласа. После этого получаем согласно терминологии, принятой в [6], уравнение сопряжения на мнимой оси плоскости z:

$$\psi^{+}(iy)\left(\frac{th\sqrt{iy}}{\sqrt{iy}} + \frac{th\sqrt{-iy}}{\sqrt{-iy}}\right) - \psi^{-}(iy) = P(iy). \qquad (16)$$

Уравнение сопряжения (16) можно записать в другой форме:

$$\psi^{+}(z)\left(\frac{th\sqrt{z}+tg\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right) - \psi^{-}(z) = P(z), z = iy. \qquad (17)$$

В выражении (17) P(z) обозначает изображение функции $p^{+}(t)$.

Согласно (10) с учетом (4)

$$P(z) = \int_0^1 R(\xi,z)\frac{sh\sqrt{z}(1-\xi)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}}d\xi. \qquad (18)$$

Рассмотрим целую функцию

$$C(z)=\frac{sh\sqrt{z}\cos\sqrt{z}+ch\sqrt{z}\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \qquad (19)$$

Функция (19) имеет вещественные нули, симметрично расположенные относительно точки 0. Обозначим положительные нули этой функции λ_n^2. Для этих нулей справедлива оценка

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<\lambda_n<-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \text{n=1,2,3…} \qquad (20)$$

Можно доказать, что других нулей функция C(z) не имеет.

Согласно общей теории целых функций [7] функция (19) может быть представлена в виде бесконечного произведения

$$\left.\begin{aligned} &C(z)=C^+(z)C^-(z);\\ &C^+(z)=\sqrt{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{\lambda_n^2});\\ &C^-(z)=\sqrt{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{\lambda_n^2}).\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Произведем факторизацию уравнения (17) [5]

$$\psi^+(z)\frac{C^-(z)}{ch\sqrt{z}}-\psi^-(z)\frac{\cos\sqrt{z}}{C^+(z)}=P(z)\frac{\cos\sqrt{z}}{C^+(z)}. \qquad (22)$$

Введем оригинал правой части (22)

$$r^+(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L P(z)\frac{\cos\sqrt{z}}{C^+(z)}e^{zt}dz,\quad t>0. \qquad (23)$$

Обозначим p(z) изображение функции $r^+(t)$. В таком случае изображение искомой функции $\psi(t)$ имеет вид:

$$\psi^+(z)=p(z)\frac{ch\sqrt{z}}{C^-(z)}. \qquad (24)$$

Таким образом, точное выражение искомой функции $\psi(t)$ формально получено:

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L p(z)\frac{ch\sqrt{z}}{C^-(z)}e^{zt}dz\,. \qquad (25)$$

Для того чтобы изучить поведение функции (25) при $t\to 0$, найдем главный член асимптотики функции (24) при $z\to\infty$. Можно показать, что главные члены асимптотик функций $C^+(z)$ и $C^-(z)$ при $z\to\infty$ имеют вид:

$$C^{+}(z) \approx \cos\sqrt{z}\,/\sqrt[4]{z/2}\ ; \qquad (26)$$

$$C^{-}(z) \approx ch\sqrt{z}\,/\sqrt[4]{-z/2}.$$

Чтобы получить асимптотику функции P(z), можно воспользоваться следующим очевидным разложением:

$$\frac{sh\sqrt{z}(1-\xi)}{\sqrt{z}ch\sqrt{z}} = \frac{e^{-\sqrt{z}\xi}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{-\sqrt{z}(2n+\xi)} + e^{-\sqrt{z}(2n-\xi)}). \qquad (27)$$

Тем самым без труда определяется асимптотика функции p(z):

$$p(z) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{2z}}\int_0^1 R(\xi,z)e^{-\sqrt{z\xi}}d\xi\ . \qquad (28)$$

И, наконец, определяем искомую асимптотику функции (24)

$$\psi^{+}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[4]{-z}}{\sqrt[4]{z}}\int_0^1 R(\xi,z)e^{-\sqrt{z\xi}}d\xi. \qquad (29)$$

Правая часть в (29) требует некоторых пояснений. Если провести разрез в плоскости z по вещественной оси от $-\infty$ до 0, то более подробная запись (29) представляется выражениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi^{+}(z) \approx \frac{1-i}{2}\frac{\sqrt[4]{-z}}{\sqrt[4]{z}}\int_0^1 R(\xi,z)e^{-\sqrt{z\xi}}d\xi, \arg z \to \pi\ ;\\
&\psi^{-}(z) \approx \frac{1+i}{2}\frac{\sqrt[4]{-z}}{\sqrt[4]{z}}\int_0^1 R(\xi,z)e^{-\sqrt{z\xi}}d\xi, \arg z \to -\pi.
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Исходя из условия (5) в дальнейшем для простоты вычислений будем предполагать, что функция

$$u_0(x) = u_0 + Ax^{\alpha}; \qquad u_0 = const,\ \alpha>0. \qquad (31)$$

В этом случае нетрудно получить представление функции R(x,z) при $z \to \infty$:

$$R(x,z) = u_0 + Ax^{\alpha} + \frac{f(x,0)}{z} + 0(\frac{1}{z}). \qquad (32)$$

Относительно функции f(x , 0) также предположим степенной характер:

$$f(x,0) = f_0 + Bx^{\beta}\ ; \qquad f_0 = const\ ,\ \beta>0. \qquad (33)$$

Таким образом, интеграл в правой части (29) при $z \to \infty$ имеет слудующую асимптотику:

$$\int_0^1 R(\xi,z)e^{-\sqrt{z\xi}}d\xi \approx u_0 z^{-1/2} + A\Gamma(1+\alpha)z^{(1+\alpha)/2} + f_0 z^{-3/2} + B\Gamma(1+\beta)z^{(3+\beta)/2}\,. \qquad (34)$$

Подстановка (34) в (29) и последующие вычисления оригинала дают такой результат:

$$\psi(t) \approx \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} + \alpha_1 t^{(\alpha-1)/2} + \alpha_2 t^{1/2} + \alpha_3 t^{(\beta+1)/2}. \qquad (35)$$

Значения постоянных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ для дальнейшего анализа несущественны и в настоящей работе не приводятся.

В работе [4] показано, что предельное значение u_x в точке (0, 0) существенно зависит от направления, по которому x и t приближаются к этой точке. А именно при стремлении к точке (0, 0) по параболам $x=\lambda\sqrt{t}$ возможно получить любое значение u_x в зависимости от λ. Из (35) следует, что при $u_0=0$ и α >1 первая производная u_x будет иметь нулевое значение при стремлении к точке (0, 0) по любому направлению. Условие α = 1 можно заменить требованием $u_0(x)\in C^1(0,1)$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x)\in C^1(0,1);\ u_0(0)=u_0'(0)=0$*, тогда u (x,t)*$\in C^{1,0}(\overline{\Pi})$.

Перейдем к исследованию второй производной по x. Проведем вычисления для $x\in(0,1)$, поскольку при отрицательных значениях x выкладки проводятся аналогично.

Прежде всего получим изображение второй производной:

$$U_{xx}^{+} = zU^{+} - R(x,z). \qquad (36)$$

Используя формулу (10), а также асимптотики (29), (32), находим

$$U_{xx}^{+} \approx \frac{\sqrt{z}}{2}\int_0^x R(\xi,z)e^{-\sqrt{z}(x-\xi)}d\xi - \sqrt{z}\psi^{+}(z)e^{-\sqrt{zx}} - R(x,z)\,. \qquad (37)$$

В последней формуле положим x=0 и учтем асимптотику для $\psi^{+}(z)$ из (29):

$$U_{xx}^{+} \approx -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mp i\pi/4}\left(u_0 + \frac{A\Gamma(1+\alpha}{z^{\alpha/2}} + \frac{f_0}{z^{1/2}} + \frac{B\Gamma(1+\beta)}{z^{(2+\beta)/2}}\right) - u_0 - \frac{f_0}{z}. \qquad (38)$$

Отсюда следует, что при $u_0\neq 0$ вторая производная u_{xx} имеет δ-особенность в точке (0, 0). При $u_0=0$ получаем

$$u_{xx} \approx b_1 A t^{(\alpha-2)/2} + b_2 f_0 t^{-1/2}\,. \qquad (39)$$

В формуле (39) b_1 и b_2 - некоторые постоянные, численное значение которых несущественно для окончательных выводов. Из этой формулы также следует, что непрерывность u_{xx} обеспечивается дополнительными ограничениями: α > 2; $f_0 = f(0,0) = 0$. Требование α = 2 можно заменить требованием $u_x(x) \in C^2(0,1)$. Из предыдущего вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $u_0(x) \in C^2(0,1); u_0(0) = u_0'(0) = 0; f_0 = f(0,0) = 0$, *тогда и* $(x,t) \in C^{2,1}(\overline{\Pi})$.

Литература

1. Gevrey M., J. Math. Pures and Appl. 1914. Vol.10. №6.
2. Кислов Н.В. Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. № 8.
3. Кислов Н.В. Неоднородная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 5.
4. Кислов Н.В., Червяков А.В. Об одной краевой задаче с меняющимся направлением времени//Вестник МЭИ. 2001. №6. С. 67-74.
5. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
7. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.