

Лаборатория прикладной математики.
Основы обработки выборочных данных.

1. Введение

Множество однородных объектов, каждый из которых является носителем одного и того же признака называется *генеральной совокупностью*. Совокупность значений признака описывается с помощью случайной величины (дискретной или непрерывной). Основной задачей математической статистики является исследование генеральной совокупности статистически, т.е. выяснение вероятностных свойств случайной величины, описывающей значения количественного признака генеральной совокупности. Полное исследование генеральной совокупности, как правило, осуществить не удаётся, поэтому в математической статистике используют *выборочный метод*. Согласно этому методу исследуется не вся генеральная совокупность, а только некоторые её объекты (выборка). С помощью выборки оценивают генеральную совокупность по вероятностным свойствам (числовые характеристики, законы распределения и т.д.). Чтобы оценки были достоверными, выборка должна быть представительной, т.е. её вероятностные свойства должны совпадать или быть близкими к свойствам генеральной совокупности.

Представительную выборку можно получить, если выбирать объекты случайно, т.е. гарантировать всем объектам генеральной совокупности одинаковую вероятность подвергнуться исследованию. С точки зрения теории вероятностей представительную выборку объёма n можно промоделировать с помощью n независимых случайных величин X_i с одинаковым законом распределения.

2. Первичная обработка (вариационный ряд , точечные и интервальные оценки генеральных параметров)

После получения выборки приступают к вычислению оценок числовых характеристик генеральной совокупности (например, математического ожидания и дисперсии).

Различают два вида оценок: *точечные* и *интервальные*. Точечные оценки представляют собой числовые значения,

рассчитанные по выборочным данным. Например, для оценки генерального среднего и дисперсии используют следующие формулы:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (2)$$

где n – объём выборки.

Основным требованием, предъявляемым к точечным оценкам, является их несмещённость. Оценка называется *несмещённой*, если её математическое ожидание совпадает с генеральным значением. Приведённые в (1), (2) оценки несмещены.

В отличие от точечной оценки интервальная оценка неизвестного параметра генеральной совокупности представляет собой некий интервал, концы которого вычисляются по выборочным данным с помощью специальных статистических программ. При этом согласно определению, этот интервал, который называется *доверительным*, содержит внутри себя неизвестный параметр с заданной *доверительной вероятностью* γ (обычно γ принимают равной 0,9; 0,95; 0,99).

Например, чтобы дать интервальную оценку математическому ожиданию нормальной генеральной совокупности используют случайную величину $t = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n}$. Величина t имеет распределение Стьюдента (Т- распределение) с числом степеней свободы $k = n - 1$ (число независимых случайных величин участвующих в её образовании). По входным данным $k = n - 1$ и $\alpha = 1 - \gamma$ можно определить число t_γ , удовлетворяющее условию:

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n}\right| > t_\gamma\right) = \alpha = 1 - \gamma. \quad (3)$$

Из равенства (3) следует нужное равенство:

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n}\right| \leq t_\gamma\right) = \gamma. \quad (4)$$

После раскрытия модуля получаем окончательно:

$$P(\bar{X} - \Delta_\gamma \leq a \leq \bar{X} + \Delta_\gamma) = \gamma, \quad (5)$$

где $\Delta_\gamma = t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Для получения интервальной оценки дисперсии нормальной генеральной совокупности используют случайную величину $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. Величина χ^2 имеет распределение Пирсона с числом степеней свободы $k = n - 1$. Можно определить два числа u_1 и u_2 по условиям:

$$P(\chi^2 > u_1) = \alpha_1 = \frac{1+\gamma}{2}, \quad k=n-1, \quad (6)$$

$$P(\chi^2 > u_2) = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}, \quad k=n-1, \quad (7)$$

Из условий (6), (7) получаем равенство:

$$P(u_1 < \chi^2 < u_2) = \gamma \quad (8)$$

После замены χ^2 её значением получим окончательно:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{u_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{u_1}\right) = \gamma. \quad (9)$$

При построении доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии предполагалось, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение.

3. Проверка гипотезы о принадлежности генеральной совокупности к нормальному закону.

В практических задачах заранее неизвестно какое распределение имеет генеральная совокупность. Тем не менее, можно проверить гипотезу о принадлежности генеральной совокупности (точнее значений её количественного признака) к тому или иному распределению. Рассмотрим критерий согласия Пирсона (χ^2 -критерий) – часто применяемый, но далеко не единственный способ проверки нормальности генеральной совокупности по выборке. Прежде всего, согласно этой процедуре по выборке составляют вариационный ряд с некоторой фиксированной длиной интервала h

Если в некотором интервале частота n_s мала ($n_s < 5$), то этот интервал объединяют с соседним. По гипотетическому распределению можно рассчитать теоретические частоты $m_s = np_s$, где s – номер интервала, а p_s в случае нормального распределения рассчитывается по формуле:

$$p_s = \Phi\left(\frac{x_{s+1} - \bar{X}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_s - \bar{X}}{S}\right). \quad (10)$$

В формуле (10) $x_{s+1} = x_s + h$, а x_s – левый конец s -го интервала. Значение S рассчитывают по формуле (2), извлекая квадратный корень. Чтобы количественно оценить согласованность теоретических m_s и эмпирических частот n_s используют величину Q^2 (статистику гипотезы), рассчитываемую по формуле:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}. \quad (11)$$

В формуле (11) r означает общее количество интервалов вариационного ряда. Случайная величина Q^2 имеет распределение Пирсона с числом степеней свободы $k = r - 3$. Далее с помощью уровня значимости α (эту величину обычно выбирают равной 0,05; 0,01; 0,001) и числа степеней свободы k выбирают границу $u_{кр}$ критической области

$$P(Q^2 > u_{кр}) = \alpha. \quad (3.12)$$

В том случае, если рассчитанное по формуле (11) значение Q^2 входит в критическую область ($Q^2 > u_{кр}$) – гипотезу о нормальности генеральной совокупности отвергают. В противном случае гипотеза принимается.

4. Задание

Провести исследование некоторой генеральной совокупности, используя выборочные данные соответствующего варианта.

1) По формулам (1), (2) дать точечные оценки генеральному среднему и дисперсии.

2) Предполагая, что выборка сделана из нормальной совокупности, построить доверительные интервалы для a и σ^2 , принять $\gamma = 0,95$ (формулы (5), (9)).

3) Построить вариационный ряд и гистограмму (шаг h указан в варианте).

4) При уровне значимости $\alpha = 0,001$ проверить гипотезу о нормальности генеральной совокупности, используя критерий согласия Пирсона (формула (11)).

Вариант 1

Выборка объёма $N = 181$, начало первого интервала $a = 102$, шаг $h = 4$.

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
120	135	116	118	133	136	125	126	119	126	129	127
129	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
124	123	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132
121	111	123	140	137	120	125	131	118	120	120	136
129	127	116	138	128	133	122	131	128	140	138	134
120	126	109	137	111	115	117	130	113	126	115	124
125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135
134											

Вариант 2

Выборка объёма $N = 213$, начало первого интервала $a = 62$, шаг $h = 4$.

95	96	103	89	72	105	85	85	91	101	82	91
80	85	91	87	101	94	98	85	82	94	86	72
89	83	100	86	85	95	95	83	87	92	92	79
93	88	77	92	92	103	85	90	83	86	104	104
85	85	80	95	91	93	70	83	93	95	95	78
111	95	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97
101	86	89	80	88	85	93	79	95	90	107	93
96	83	88	91	95	94	88	80	96	93	77	71
88	97	90	86	93	91	98	95	83	84	91	99
109	80	95	87	89	85	87	72	77	90	97	87

95	91	88	91	81	88	78	75	80	97	95	83
91	78	87	92	103	77	101	66	71	90	105	76
97	75	95	88	84	96	79	89	94	100	87	100
92	100	79	96	104	84	89	82	93	92	85	80
104	87	90	85	89	83	84	98	81	97	86	81
96	82	102	73	100	81	86	84	86	88	90	94
81	99	100	81	95	88	90	87	97	90	100	94
88	85	95	74	85	88	78	97	74			

Вариант 3

Выборка объёма $N = 175$, начало первого интервала $a = -37$, шаг $h = 2$.

-29	-22	-16	-20	-16	-18	-28	-20	-32	-22	-23	-26	-10	-25	-25
-29	-29	-19	-12	-26	-18	-20	-9	-24	-20	-19	-26	-23	-11	-26
-30	-23	-30	-18	-20	-13	-17	-24	-28	-26	-21	-21	-26	-24	-36
-23	-24	-25	-20	-23	-17	-11	-22	-19	-19	-25	-29	-23	-16	-25
-15	-18	-17	-19	-21	-12	-24	-30	-33	-22	-15	-18	-26	-22	-19
-25	-23	-21	-22	-22	-25	-16	-25	-19	-17	-30	-13	-25	-19	-24
-17	-24	-16	-23	-15	-22	-22	-19	-20	-19	-33	-14	-17	-21	-16
-24	-13	-20	-19	-17	-13	-27	-25	-25	-19	-22	-22	-22	-23	-9
-11	-22	-24	-18	-19	-18	-31	-16	-18	-24	-14	-23	-26	-25	-19
-23	-24	-21	-26	-25	-18	-16	-30	-16	-24	-13	-14	-18	-22	-22
-28	-18	-21	-27	-31	-23	-23	-27	-21	-21	-22	-34	-24	-20	-24
-21	-32	-16	-18	-15	-22	-15	-15	-22	-18					

Вариант 4

Выборка объёма $N = 194$, начало первого интервала $a = 39$, шаг $h = 6$.

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96	95	87
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95	71	105
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95	98	84
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	98	78	85	80	93	64	65	109	89	55
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73	65	79
99	81	92	76	82	95	75	45	94	81	84	68
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69	68	81
83	69	90	99	69	85	84	70	80	117	76	104
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98	86	82
54	62	82	103	91	61	93	68	109	96	67	110
84	82	56	78	80	88	66	78	65	50	88	72
94	92	89	109	69	58	75	72	101	92	75	77

85	76	85	84	68	74	78	87	69	75	61	53
70	106	68	81	61	64	100	73	74	57	63	102
96	80										

Вариант 5

Выборка объёма $N = 229$, начало первого интервала $a = -25$, шаг $h = 6$.

34	14	-14	10	9	29	27	-1	-4	17	23	13	18	-17	-22
1	8	-9	3	11	6	26	6	8	16	19	22	-8	23	-5
17	-21	-20	-17	16	3	6	25	0	4	5	6	-21	-2	8
-6	11	3	-2	17	13	8	27	11	9	12	12	-1	25	4
19	-8	29	0	-13	0	9	26	19	29	9	22	30	13	19
-1	-10	20	-7	21	10	8	-5	-2	9	-10	1	12	8	35
11	15	13	2	-5	-12	11	9	34	9	-2	-20	-4	-2	19
31	31	-11	-7	23	-20	-2	-12	-3	13	-7	15	8	-9	19
-8	-12	8	30	-22	18	-9	19	17	28	26	6	-7	0	-9
7	11	20	23	12	19	52	-10	32	29	33	3	-8	5	-4
9	18	-16	0	-8	25	32	26	-1	-5	6	-5	21	9	17
21	33	7	19	-2	6	14	8	14	27	16	-6	8	-2	-3
-16	-22	-7	13	20	18	1	4	-4	2	20	14	28	-9	-2
34	-16	-9	5	20	-8	25	7	19	5	12	-2	5	25	1
6	-7	4	-14	3	2	24	-5	4	24	30	21	7	27	12
36	13	-2	18											

Вариант 6

Выборка объёма $N = 237$, начало первого интервала $a = 285$, шаг $h = 7$.

324	296	313	323	312	321	322	301	337	322	329	307
301	328	312	318	327	315	319	317	309	334	323	340
326	322	314	335	313	322	319	325	312	300	323	335
339	326	298	298	337	322	303	314	315	310	316	321
312	315	331	322	321	336	328	315	338	318	327	323
325	314	297	303	322	314	317	330	318	320	312	333
332	319	325	319	307	305	316	330	318	335	327	321
332	288	322	334	295	318	329	305	310	304	326	319
317	316	316	307	309	309	328	317	317	322	316	304
303	350	309	327	345	329	338	311	316	324	310	306
308	302	315	314	343	320	304	310	345	312	330	324
308	326	313	320	328	309	306	306	308	324	312	309
324	321	313	330	330	315	320	313	302	295	337	346
327	320	307	305	323	331	345	315	318	331	322	315
304	324	317	322	312	314	308	303	333	321	312	323
317	288	317	327	292	316	322	319	313	328	313	309
329	313	334	314	320	301	329	319	332	316	300	300
304	306	314	323	318	337	325	321	322	288	313	314
307	329	302	300	316	321	315	323	331	318	334	316

328 294 288 312 312 315 321 332 319

Вариант 7

Выборка объёма $N = 161$, начало первого интервала $a = 48$, шаг $h = 3$.

61	59	60	50	58	71	57	61	55	75	68	65	63	68	60
66	52	70	69	62	58	56	54	65	61	67	64	58	61	64
71	60	51	54	57	56	55	57	65	56	61	49	67	64	59
65	63	72	67	54	53	58	69	63	66	55	57	68	53	61
55	69	54	64	54	61	66	65	57	60	72	62	68	61	62
52	62	55	70	72	64	71	54	58	71	66	65	66	62	68
60	64	63	61	60	64	65	68	64	66	69	53	57	59	62
60	63	65	60	66	68	66	64	64	67	62	55	65	62	60
55	65	56	57	72	53	62	68	63	57	55	68	59	61	63
62	63	62	59	67	56	65	67	56	69	63	53	55	67	61
54	68	59	63	67	57	64	68	76	64	64				

Вариант 8

Выборка объёма $N = 235$, начало первого интервала $a = 28$, шаг $h = 5$.

78	85	52	53	62	56	58	68	98	58	94	84	57	68	64
61	64	62	53	89	66	54	62	57	64	66	35	53	73	57
62	54	75	52	59	72	54	66	46	44	57	63	86	63	61
59	54	83	53	71	64	60	48	77	47	51	54	60	67	85
54	66	64	82	78	70	88	61	63	77	41	62	69	60	64
64	66	80	71	53	99	58	63	43	56	51	70	73	76	73
60	58	59	67	53	56	74	71	86	30	55	58	67	76	69
73	85	50	63	50	74	78	60	78	68	72	65	87	62	72
51	68	65	64	72	72	70	70	78	50	56	66	73	67	60
65	59	64	58	71	76	51	52	67	71	61	73	45	82	64
63	53	76	58	58	77	68	67	60	69	64	53	70	79	79
80	53	83	51	46	63	74	45	73	70	92	79	82	73	64
69	56	48	64	75	62	67	49	58	73	52	64	67	57	40
70	64	75	78	59	51	86	74	72	43	53	65	53	98	64
66	54	70	81	47	68	85	93	70	51	71	87	56	63	49
79	46	54	49	63	96	63	61	82	61					

Вариант 13

Выборка объёма $N = 184$, начало первого интервала $a = -95$, шаг $h = 8$.

-71	-74	-51	-87	-37	-72	-64	-77	-63	-58	-50	-39	-71	-48	-39
-44	-62	-59	-50	-91	-51	-65	-54	-70	-50	-46	-66	-44	-71	-72
-58	-52	-58	-72	-62	-47	-58	-69	-58	-72	-42	-70	-84	-65	-65
-49	-45	-53	-50	-73	-47	-21	-40	-74	-35	-49	-68	-44	-50	-74
-53	-66	-67	-64	-63	-49	-67	-41	-67	-57	-56	-60	-71	-46	-79
-72	-48	-38	-51	-37	-60	-58	-52	-58	-55	-50	-64	-68	-53	-70
-59	-59	-90	-72	-61	-74	-36	-79	-65	-68	-39	-54	-86	-49	-48
-59	-44	-68	-52	-60	-42	-78	-29	-68	-79	-78	-68	-70	-66	-45
-62	-56	-36	-67	-64	-45	-63	-59	-59	-58	-67	-69	-44	-69	-69
-78	-58	-53	-58	-71	-52	-59	-27	-46	-56	-72	-50	-55	-30	-56
-62	-34	-35	-38	-64	-67	-59	-59	-58	-62	-88	-30	-41	-59	-54
-47	-55	-50	-79	-63	-50	-77	-23	-73	-63	-63	-67	-74	-59	-60
-46	-57	-74	-54											

Вариант 14

Выборка объёма $N = 221$, начало первого интервала $a = 25$, шаг $h = 4$.

58	49	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	48
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	55	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	69	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65	66
42	63	59	60	70	54	40	58	49	66	59	55	50	46	58
73	41	68	54	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71	67
54	63	63	65	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43	45
45	40	54	77	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47	38
54	57	52	63	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71	57
47	52	51	59	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71	63
50	46	42	48	59	53	64	53	54	72	55				

Вариант 15

Выборка объёма $N = 234$, начало первого интервала $a = 141$, шаг $h = 5$.

174	166	157	161	165	162	161	164	172	158	161	163
160	154	171	160	168	171	161	162	168	164	166	159
172	154	154	154	153	159	160	173	150	166	157	177
165	168	152	168	164	158	153	164	174	179	159	165
167	169	164	168	151	174	166	169	170	159	162	153
175	178	157	170	174	169	159	154	165	167	161	168
157	182	175	170	155	164	174	167	170	159	160	153
151	169	155	143	163	155	173	166	164	186	161	158
150	159	167	163	166	155	149	157	164	166	171	172
154	161	169	164	173	164	162	171	156	155	160	156
165	149	175	150	162	179	154	167	158	155	147	161
161	173	166	156	171	158	164	168	173	166	148	174
176	173	167	162	166	167	164	158	160	163	161	154
151	156	150	157	163	168	270	165	174	149	161	162
155	164	156	157	170	173	165	160	166	166	160	165
159	157	162	173	173	151	151	169	167	145	166	168
161	169	170	172	159	161	162	151	165	161	151	156
167	148	167	170	149	162	169	157	167	169	174	163
164	169	161	164	172	160	154	156	166	170	164	160
161	149	158	168	176	155						

Вариант 16

Выборка объёма $N = 210$, начало первого интервала $a = 3$, шаг $h = 9$.

79	56	46	50	67	37	53	49	42	57	49	20	45	83	15
54	43	82	54	49	27	56	49	26	46	72	41	38	29	65
59	61	41	32	42	71	55	46	71	68	37	67	36	33	38
39	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68	44	33	47	63
69	52	67	66	7	54	56	39	40	61	73	50	49	72	57
77	54	70	45	49	50	41	39	61	70	44	42	43	71	57
70	55	45	36	40	71	17	48	49	48	72	48	53	28	44
64	11	66	37	12	36	15	55	39	72	61	68	42	48	72
48	28	40	32	26	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52
25	67	50	60	69	63	60	58	46	11	59	53	77	38	54
41	76	56	46	26	58	40	43	55	45	73	47	76	46	16
86	25	27	43	26	61	64	10	50	24	42	36	33	51	34
54	80	56	27	57	76	43	49	43	67	75	64	39	64	53
62	88	27	37	56	67	63	56	48	28	24	42	43	48	49

Вариант 17

Выборка объёма $N = 236$, начало первого интервала $a = -84$, шаг $h = 7$.

-21	-66	-28	-40	-37	-58	-44	-32	-60	-33	-47	-55	-47	-37	-31
-41	-45	-45	-41	-42	-27	-33	-33	-63	-51	-53	-46	-37	-23	-36
-43	-78	-38	-43	-46	-37	-46	-47	-48	-59	-30	-37	-60	-42	-49
-32	-61	-37	-54	-42	-26	-30	-60	-40	-65	-50	-63	-53	-47	-61
-47	-34	-30	-62	-44	-39	-25	-49	-48	-51	-43	-50	-44	-64	-45
-54	-21	-40	-25	-59	-40	-48	-54	-38	-42	-34	-46	-31	-30	-75
-70	-59	-45	-57	-45	-33	-51	-47	-58	-32	-36	-42	-37	-47	-32
-28	-69	-33	-45	-38	-42	-30	-29	-18	-57	-46	-45	-47	-37	-58
-72	-38	-50	-51	-49	-47	-63	-52	-34	-47	-63	-53	-65	-55	-39
-60	-50	-57	-46	-70	-42	-39	-43	-60	-52	-52	-46	-34	-33	-31
-39	-16	-54	-63	-63	-27	-48	-38	-34	-40	-49	-43	-32	-54	-56
-38	-34	-39	-31	-46	-52	-80	-21	-54	-50	-50	-55	-47	-26	-34
-54	-36	-33	-46	-23	-56	-28	-36	-35	-52	-51	-58	-65	-36	-58
-53	-54	-44	-43	-37	-49	-63	-52	-50	-58	-51	-58	-40	-40	-19
-51	-81	-42	-52	-50	-20	-53	-49	-40	-55	-55	-48	-28	-49	-46
-65	-63	-37	-47	-43	-35	-81	-44	-18	-41	-53				

Вариант 18

Выборка объёма $N = 204$, начало первого интервала $a = 17$, шаг $h = 7$.

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	40
42	53	54	65	46	65	61	55	38	66	42	56	54	40	60
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	35	56	34	59
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	55	55
46	53	51	50	60	30	48	56	29	74	52	60	44	62	23
54	40	33	20	55	42	61	54	41	45	75	59	41	51	45
54	52	62	69	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	39
82	67	68	34	56	51	56	48	53	47	59	51	59	66	48
61	42	54	33	39	47	46	47	73	63	34	44	51	46	40
43	30	60	61	53	47	42	56	70	48	45	65	48	48	51
40	57	56	33	44	43	45	35	35	56	59	66	56	52	44
53	49	55	25	53	48	73	38	58	72	57	46	54	55	59
38	53	48	68	36	53	41	55	51	50	45	50	29	60	39
50	59	33	56	49	31	70	56	56						

Вариант 19

Выборка объёма $N = 224$, начало первого интервала $a = 80$, шаг $h = 11$.

144	166	120	89	103	140	143	126	119	125	161	140
168	133	151	132	135	166	131	120	127	105	136	145
154	105	173	97	113	150	143	107	133	139	127	138
107	107	127	127	159	170	120	120	106	126	152	128
160	120	109	106	134	127	107	106	95	91	113	128
120	99	160	137	143	103	138	143	131	157	148	146
112	141	174	109	173	91	148	123	133	117	122	139
107	139	169	125	141	132	115	157	127	158	115	161
165	145	168	107	105	115	113	138	113	145	104	99
137	144	122	93	124	120	112	159	135	145	137	115
98	159	158	125	125	121	145	130	168	132	118	139
184	153	133	122	138	117	147	115	134	102	107	85
159	139	156	123	138	136	112	101	114	141	164	142
96	137	161	153	125	147	137	129	140	171	115	155
126	145	109	147	112	98	144	114	109	149	114	173
118	138	102	168	116	125	151	86	129	166	115	106
120	133	159	158	156	114	109	138	108	155	129	145
139	161	116	110	155	122	181	151	129	128	137	104
107	115	131	146	119	125	164	145				

Вариант 20

Выборка объёма $N = 209$, начало первого интервала $a = 36$, шаг $h = 11$.

107	78	93	81	80	92	126	93	67	50	104	110
120	91	101	91	120	88	69	74	102	65	48	71
103	67	95	112	112	86	99	99	103	122	112	102
92	69	105	106	124	46	72	75	126	73	106	75
80	92	68	112	127	88	93	74	131	51	117	145
96	76	71	138	104	120	67	92	130	99	94	92
97	105	84	78	100	98	114	113	94	108	76	88
91	78	96	81	116	75	120	75	62	113	109	111
127	63	87	86	66	100	75	84	95	121	103	95
70	98	67	148	95	92	105	114	98	102	41	76
114	90	97	111	93	110	79	63	109	69	108	71
111	100	136	92	84	123	84	125	102	96	72	102
90	136	87	132	137	100	102	88	65	75	114	79
122	63	115	90	78	86	122	119	87	115	96	137
106	105	88	75	100	84	71	123	121	94	114	94
93	118	94	102	109	86	45	97	93	43	48	114
85	79	124	89	104	108	108	100	106	102	105	119
71	86	115	82	101							

Вариант 21

Выборка объёма $N = 193$, начало первого интервала $a = 95$, шаг $h = 5$.

110	115	122	128	115	118	116	124	120	127	136	129
119	124	131	116	108	122	118	132	118	118	116	132
124	120	124	124	118	127	126	119	115	122	131	129
128	122	103	125	115	122	114	109	132	122	121	129
108	111	104	115	105	135	132	133	119	137	126	102
114	109	125	121	112	131	115	122	118	116	130	126
131	127	116	120	119	128	104	131	115	140	115	124
126	115	104	125	131	117	118	102	127	120	102	120
130	128	106	132	129	131	126	116	128	134	132	124
107	119	132	117	120	122	114	125	139	116	125	132
111	122	120	113	123	119	122	112	125	101	121	124
110	123	141	115	121	113	125	139	111	117	114	109
128	126	139	114	123	125	123	118	129	123	124	122
123	120	115	115	127	115	114	133	128	123	104	124
105	124	112	135	117	127	134	117	120	97	123	105
108	119	112	114	133	112	120	145	121	126	127	118
129											

Вариант 22

Выборка объёма $N = 236$, начало первого интервала $a = 154$, шаг $h = 6$.

184	181	201	178	190	188	181	180	186	180	176	186
185	184	187	176	189	194	196	190	193	180	186	195
197	189	197	190	176	200	196	188	203	191	180	181
188	185	188	173	184	180	189	178	190	175	193	184
177	179	177	203	185	182	191	183	183	211	189	177
195	196	175	188	189	187	193	185	184	193	181	185
214	177	196	195	193	173	190	200	176	179	185	182
175	180	179	170	206	182	197	197	180	193	192	200
175	196	174	171	160	187	185	206	187	182	175	172
191	179	191	199	197	177	175	170	174	194	188	182
179	186	190	183	196	183	185	174	195	179	197	182
183	184	185	172	193	175	172	179	179	184	190	183
178	192	186	157	172	185	180	193	177	174	200	195
184	186	185	206	192	189	189	184	183	182	179	186
184	169	189	180	183	192	186	200	176	191	186	182
202	184	192	179	204	197	194	182	172	185	175	187
182	184	186	201	197	188	188	194	184	193	178	191
203	193	190	185	181	187	181	196	204	177	178	167
178	194	188	182	182	199	180	181	187	187	178	181
180	182	160	183	193	189	193	191				

Вариант 23

Выборка объёма $N = 183$, начало первого интервала $a = -57$, шаг $h = 14$.

5	-25	13	29	28	24	-8	40	24	-7	42	-49	30	-31	-7
-3	53	-6	14	46	-16	3	2	19	31	-26	10	46	-4	-5
5	8	6	30	39	14	3	32	6	25	-13	-12	20	26	5
33	2	-20	5	29	5	39	36	24	38	-2	30	53	52	7
20	-35	27	11	-12	23	1	-10	-3	-5	31	21	6	-15	-2
17	-15	26	17	0	46	13	21	-3	6	9	31	-15	43	4
19	-8	9	37	43	-3	20	20	24	17	3	43	-19	-36	19
-6	14	6	24	5	-50	4	-24	-6	43	17	-22	37	19	28
9	3	-34	-7	19	18	-14	19	15	-26	-6	52	5	26	29
28	-4	8	-1	30	65	1	25	-3	1	30	53	35	9	-11
1	35	1	21	76	29	-15	6	-31	-6	58	18	-10	3	60
17	23	3	3	27	-2	9	88	6	-1	21	-6	30	12	1
24	28	7												

Вариант 24

Выборка объёма $N = 203$, начало первого интервала $a = -94$, шаг $h = 12$.

-64	5	-53	-29	-61	-49	-1	-22	-25	-38	-73	-20	-8	-37	-47
0	-37	-50	-46	-13	7	-13	-42	-1	-44	-27	-20	-33	-37	-30
-20	-73	-57	-40	-4	-40	-83	-33	-37	-26	-79	-16	-77	-5	-51
-28	-63	-24	-25	-24	-38	16	-38	-15	29	-11	-14	-34	-31	-23
-16	-58	-73	-43	-31	-65	-12	-4	-38	-25	-31	-7	-9	-60	-61
-47	-46	-33	-15	-79	-48	1	-62	-14	-49	-31	-25	-33	-38	-27
-51	-30	-43	-64	-24	-50	-22	-37	-6	-11	-78	-51	-1	-9	-34
1	-17	-33	11	-54	-31	-34	-38	-22	-2	-9	-15	-6	-87	-45
-22	-30	-15	-30	-18	-77	6	-47	-33	-21	-86	-31	-45	-43	-19
-36	-46	-69	-22	-59	-30	-22	5	-29	-42	-47	5	-17	-71	-36
6	-6	-7	-41	-37	-11	-11	-65	-36	-58	-36	-30	-46	-15	-49
-88	-12	-8	-83	-13	-30	-48	-66	-9	-31	-13	-32	-21	-47	-50
-25	-6	-31	-75	-48	-77	-14	-55	-26	-9	-32	-41	-68	-55	-53
25	-77	1	-65	-35	-51	-24	-42							

Вариант 25

Выборка объёма $N = 177$, начало первого интервала $a = 25$, шаг $h = 13$.

100	51	80	83	83	67	55	84	78	83	101	75
78	99	69	99	71	67	56	74	51	78	34	67
107	66	106	70	117	67	116	79	120	47	113	113
59	100	78	31	68	66	91	85	64	55	83	77
68	83	38	89	88	58	75	60	89	111	42	104
33	96	50	42	81	78	42	64	89	60	32	46
82	33	72	93	94	49	153	68	85	78	95	51
76	81	67	50	75	99	114	111	108	127	110	91
77	85	102	101	79	118	132	130	79	88	76	73
82	75	118	50	100	70	42	79	64	78	137	83
92	71	84	77	73	100	69	77	74	98	79	102
83	66	59	67	87	60	91	68	91	103	73	93
69	54	82	71	60	88	82	82	41	68	53	78
96	97	81	86	69	52	77	66	100	119	84	102
46	54	77	129	87	106	84	96	81			

Вариант 26

Выборка объёма $N = 161$, начало первого интервала $a = 0$, шаг $h = 7$.

22	49	18	44	52	31	18	20	27	35	41	28	29	45	36
40	41	37	18	40	25	38	46	37	50	41	37	37	21	37
27	27	32	34	28	40	31	20	22	25	31	34	56	35	37
47	40	29	28	29	3	27	12	41	24	40	57	49	37	34
23	38	19	29	27	32	21	21	13	40	24	37	7	24	34
52	38	32	49	43	25	16	33	22	6	41	48	35	55	35
4	31	18	19	17	23	6	36	40	12	66	26	23	30	28
49	30	50	13	33	46	26	37	30	46	41	18	28	14	50
26	25	30	53	46	30	11	40	40	24	16	24	28	29	25
10	19	35	27	22	38	32	41	21	46	27	49	34	53	32
31	15	24	38	25	34	22	35	42	38	33				

Вариант 29

Выборка объёма $N = 177$, начало первого интервала $a = 6$, шаг $h = 4$.

17	25	25	25	32	32	23	24	23	26	29	34	29	26	23
21	21	19	27	17	22	31	23	23	26	37	15	12	32	23
25	45	27	38	8	19	25	15	24	23	39	21	29	22	22
24	21	24	31	22	23	31	24	26	19	17	26	25	30	18
32	32	37	28	29	17	17	24	28	18	38	18	28	25	14
18	26	27	26	20	33	24	33	33	36	22	19	25	23	23
33	25	32	24	33	17	15	26	25	21	37	24	36	28	37
19	25	21	23	27	32	12	25	23	28	18	41	21	26	35
31	21	16	27	34	16	30	20	24	16	20	33	21	31	22
17	23	14	28	37	18	29	26	26	19	28	31	22	28	23
22	27	20	29	24	17	24	15	24	21	22	30	19	42	33
27	23	9	25	26	12	19	33	24	35	22	26			

Вариант 30

Выборка объёма $N = 181$, начало первого интервала $a = 40$, шаг $h = 4$.

57	61	60	63	66	68	64	72	69	59	71	62	69	57	61
58	60	66	59	62	64	53	50	50	55	70	61	77	70	65
66	72	71	60	74	62	49	62	76	66	64	62	60	53	65
49	79	58	73	61	63	64	59	55	70	62	61	68	69	67
64	42	73	62	69	60	64	69	62	67	67	72	57	51	77
58	63	71	73	68	80	54	64	53	64	68	58	73	68	61
54	73	59	69	60	67	57	54	69	55	70	65	61	65	62
71	55	67	57	64	70	55	65	69	65	65	60	66	63	74
60	54	75	62	74	63	64	76	59	71	68	55	68	61	57
73	54	57	56	65	53	64	58	67	48	66	68	55	77	59
58	58	62	58	52	62	65	71	64	66	65	58	66	73	73
72	43	63	59	76	67	63	71	66	59	69	65	66	50	65
57														

5. Образец решения задания с использованием программы [GeoGebra](#).

В качестве примера разберем 29 вариант. Выборочные данные введем в таблицу (числа копируются столбцами)

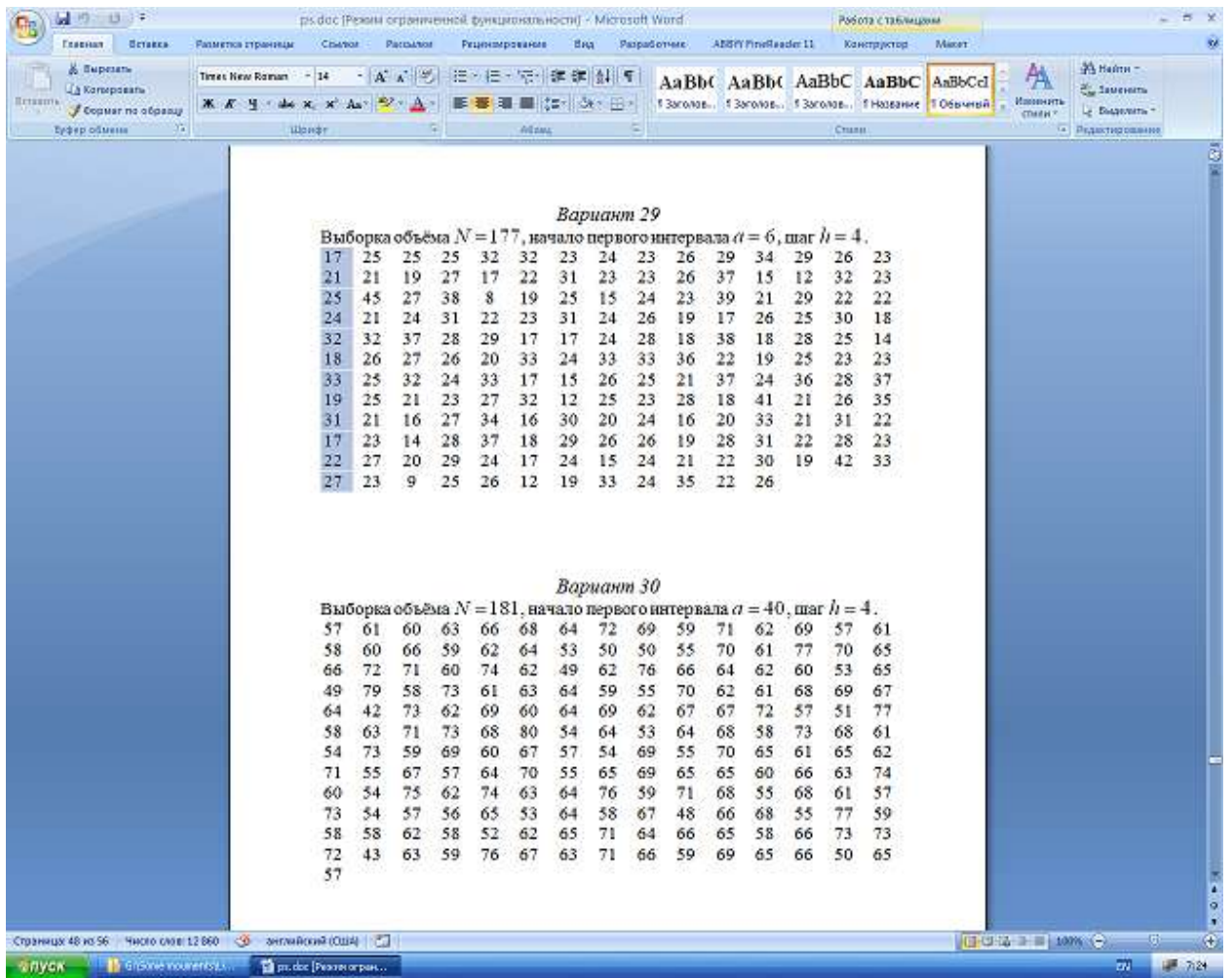


Рис.1

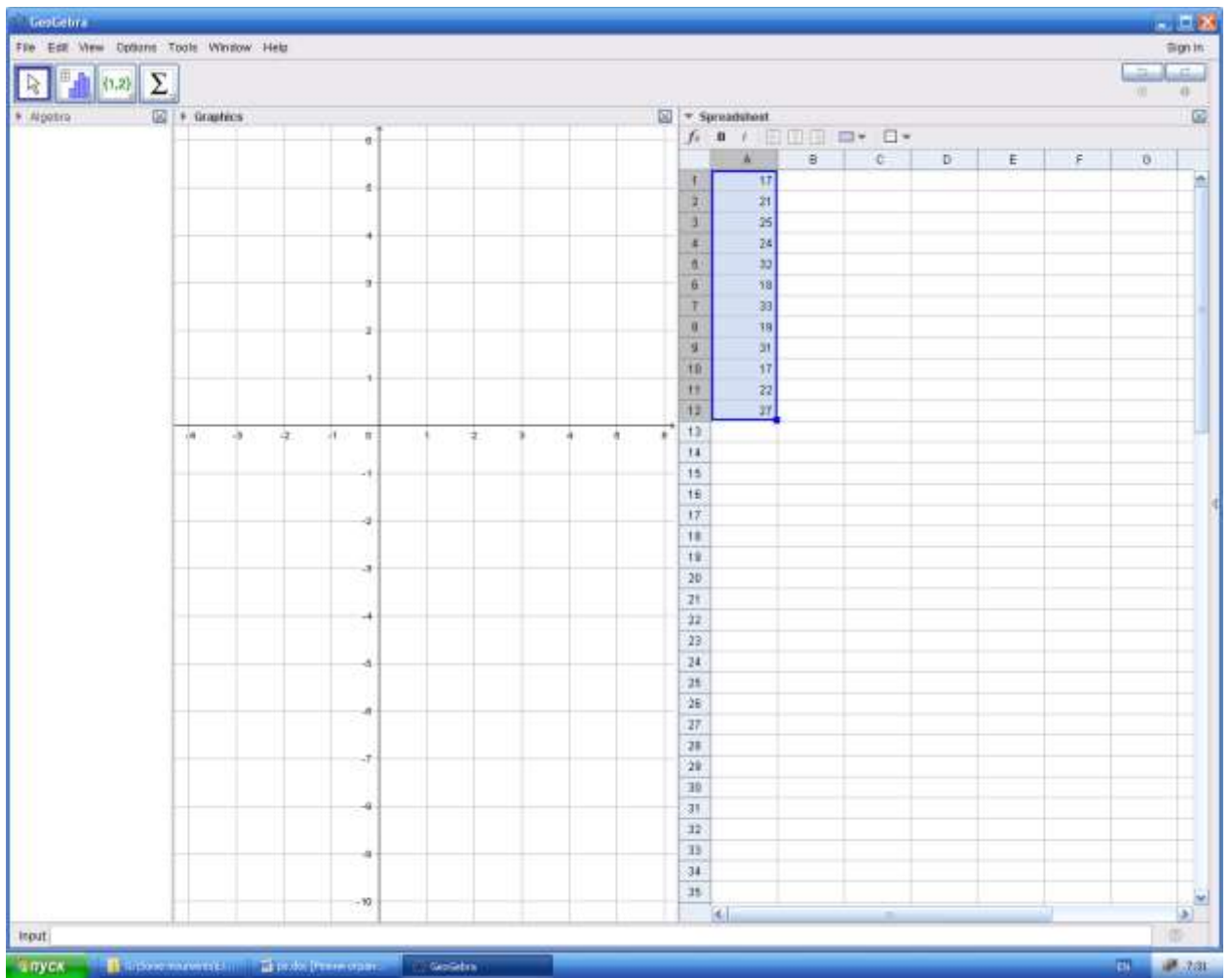


Рис.2

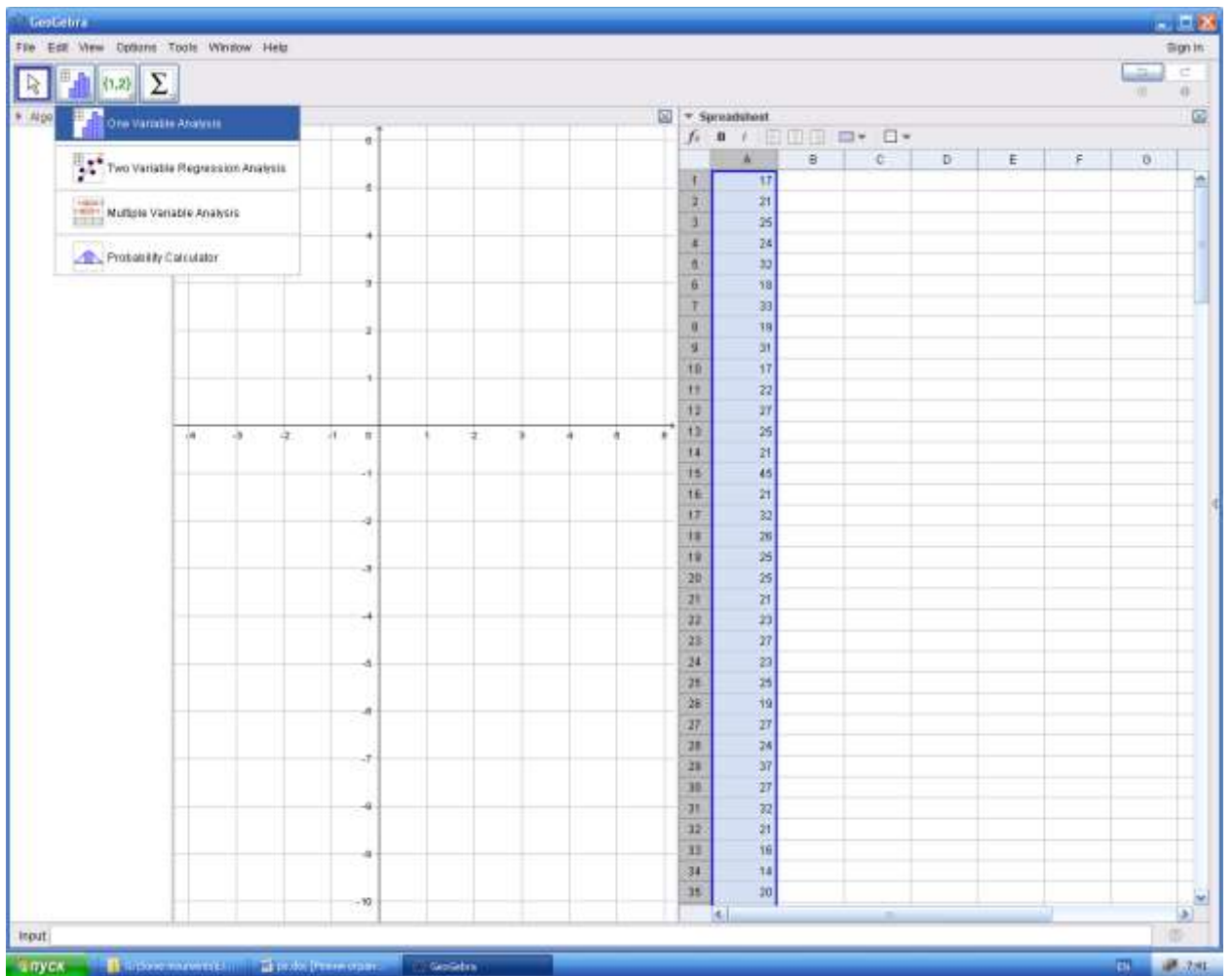


Рис.3

На рис.1,2,3 показан способ внесения выборочных данных в таблицу [GeoGebra](#). В панели инструментов выбираем One Variable Analysis как показано на рис.3

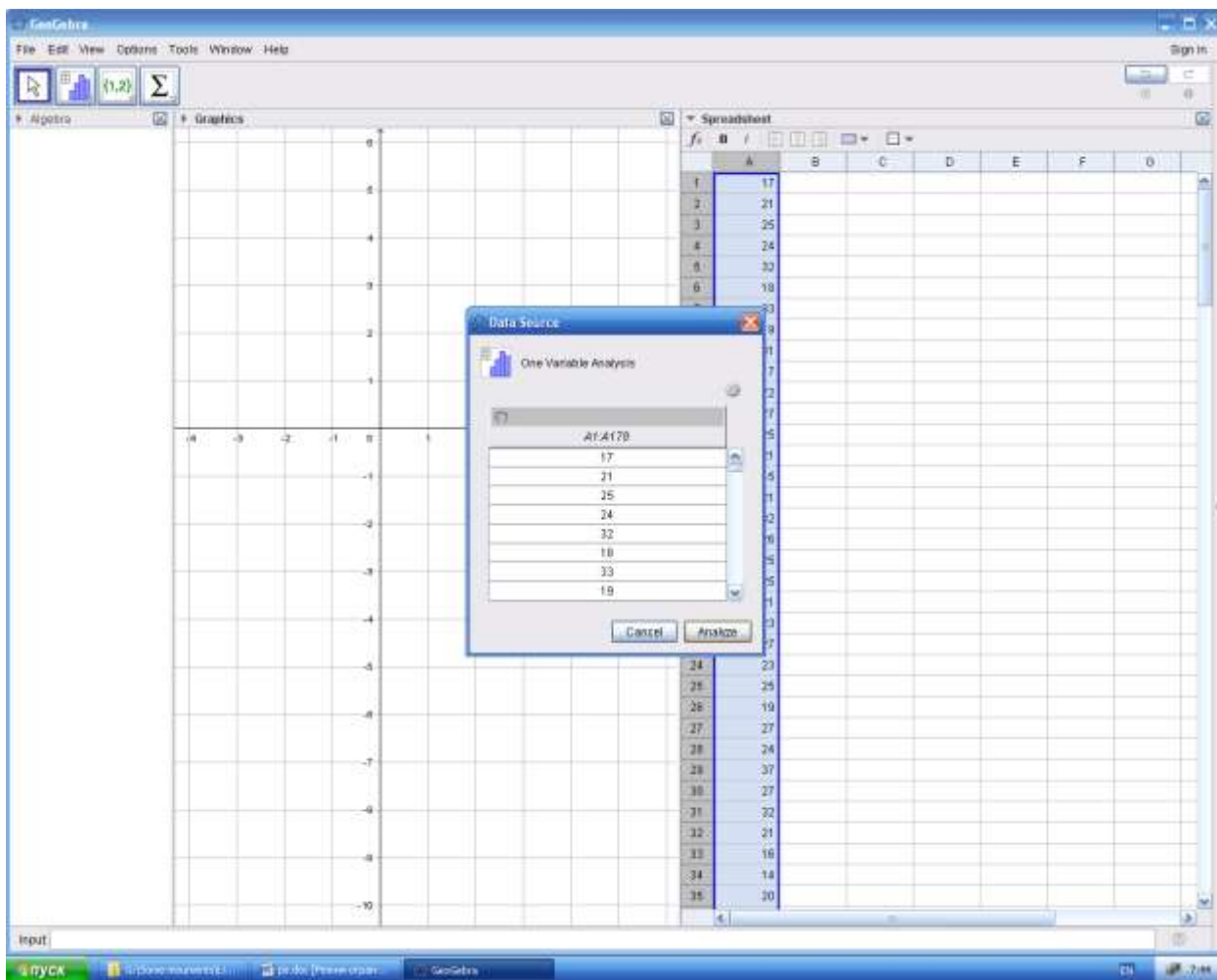


Рис.4

В появившемся окне выбираем Analyze (рис. 4).

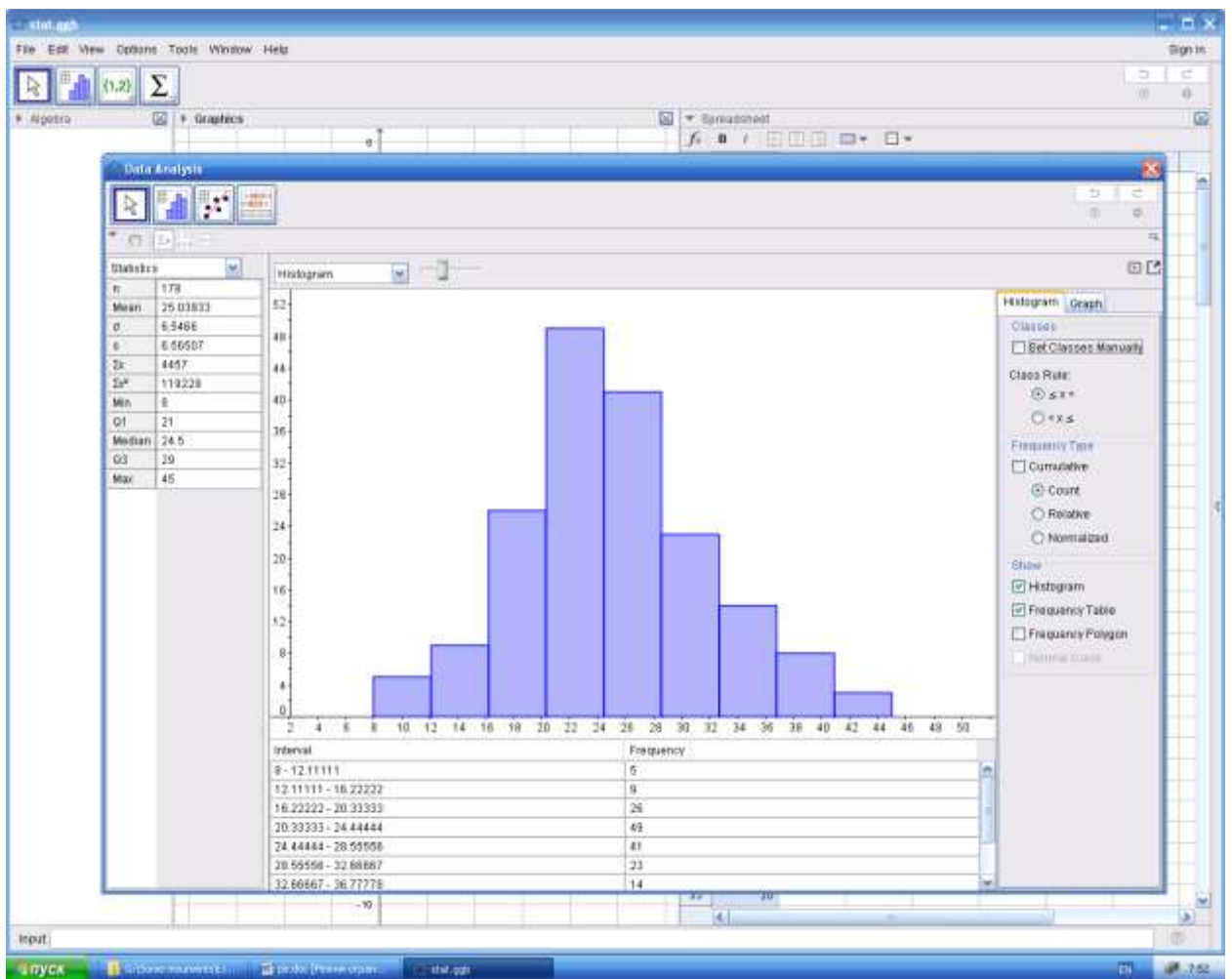


Рис.5

На рис. 5 показаны гистограмма , вариационный ряд и основные выборочные числовые характеристики.

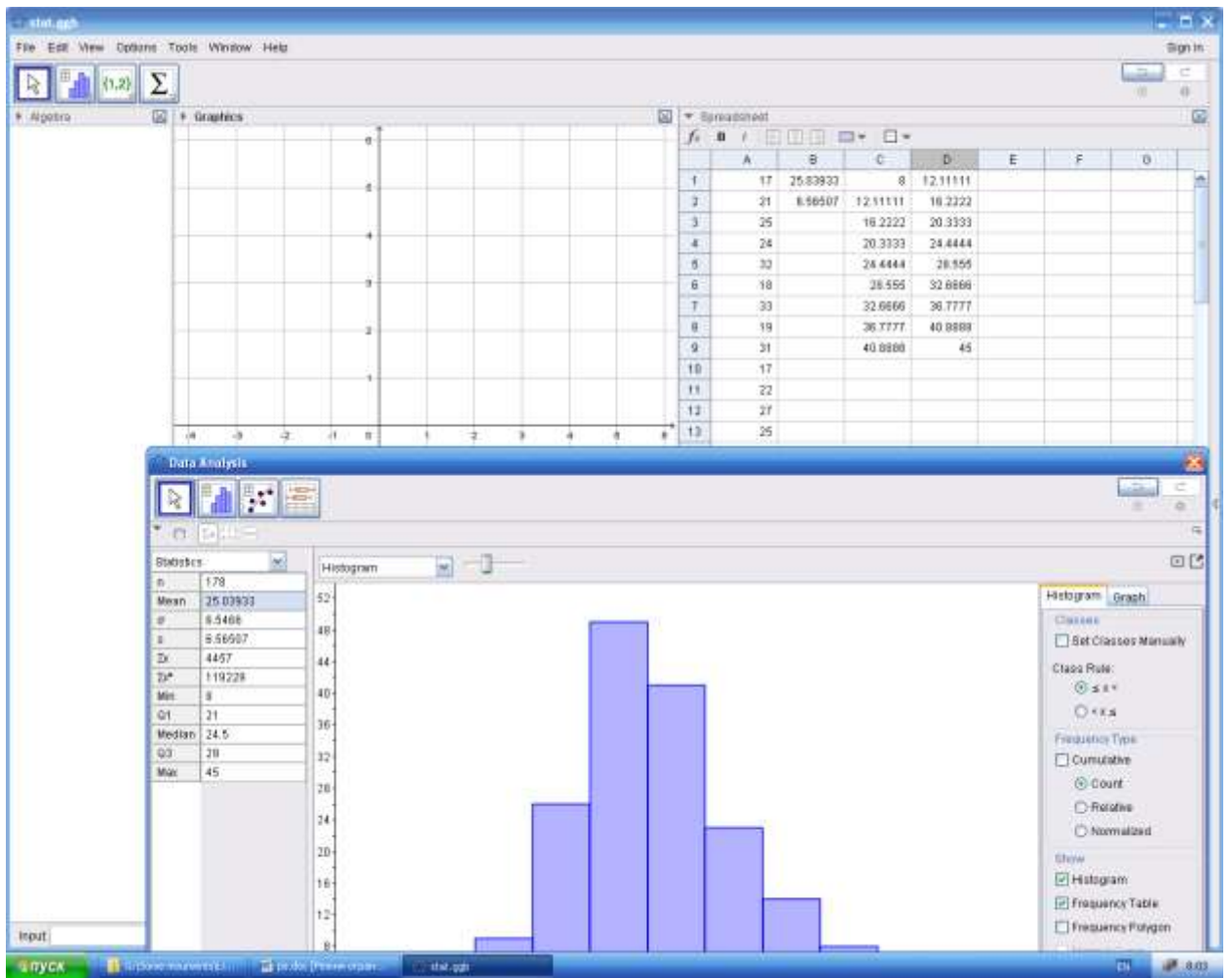


Рис.6

В ячейку B1 и B2 вносим значения Mean и s . Частичные интервалы выбираем по рис.5 и вносим их в ячейки C1:C9 (левые концы) и D1:D9 (правые концы)

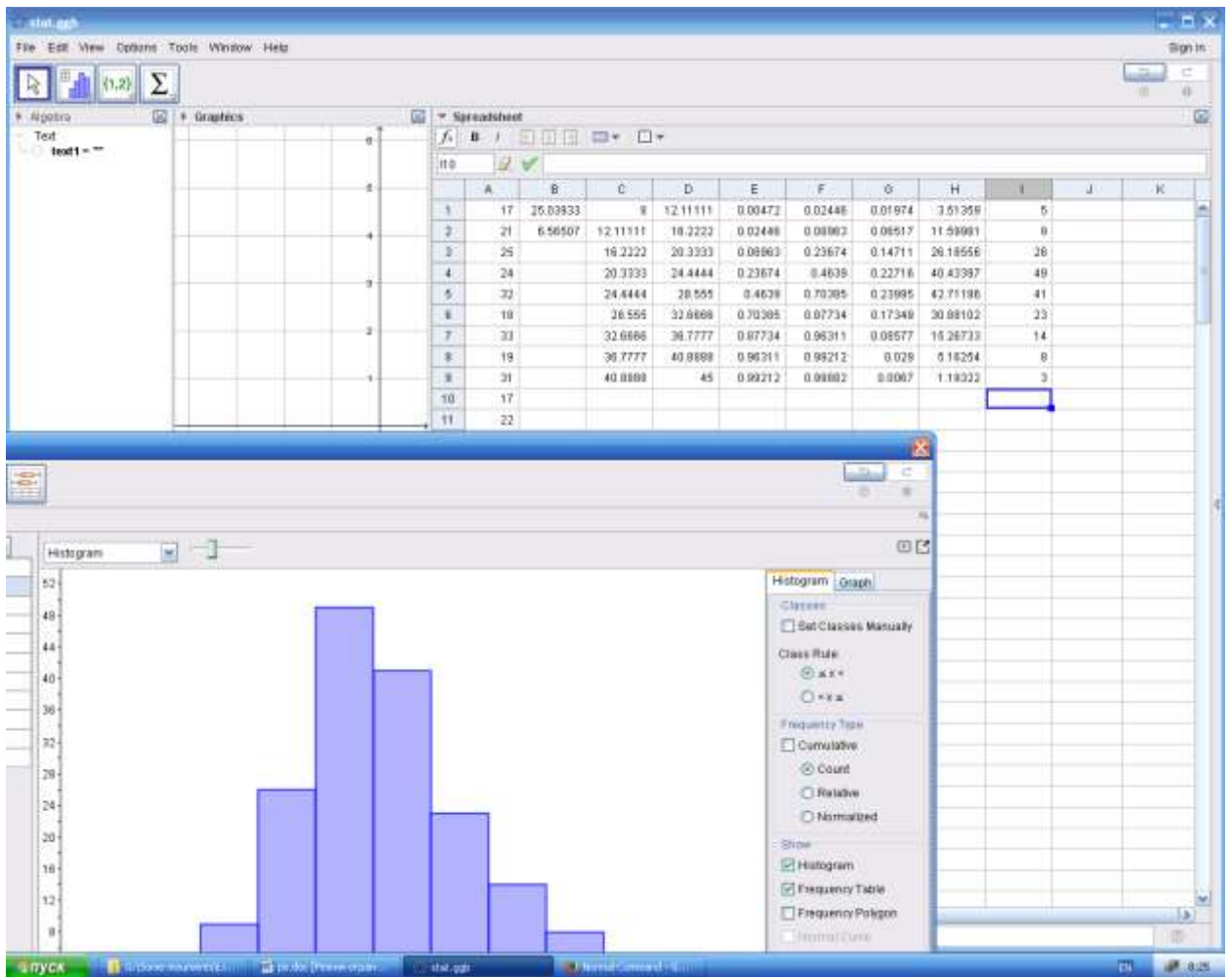


Рис.7

В ячейку E1 вводим формулу $\text{Normal}(B\$1, B\$2, C1)$ и копируем ее на диапазон E1:E9

В ячейку F1 вводим формулу $\text{Normal}(B\$1, B\$2, D1)$ и копируем ее на диапазон F1:F9

В ячейку G1 вводим формулу $F1-E1$ и копируем ее на диапазон G1:G9

В ячейку H1 вводим формулу $178*G1$ и копируем ее на диапазон H1:H9

В ячейки I1:I9 вносим импирические частоты из рис.5

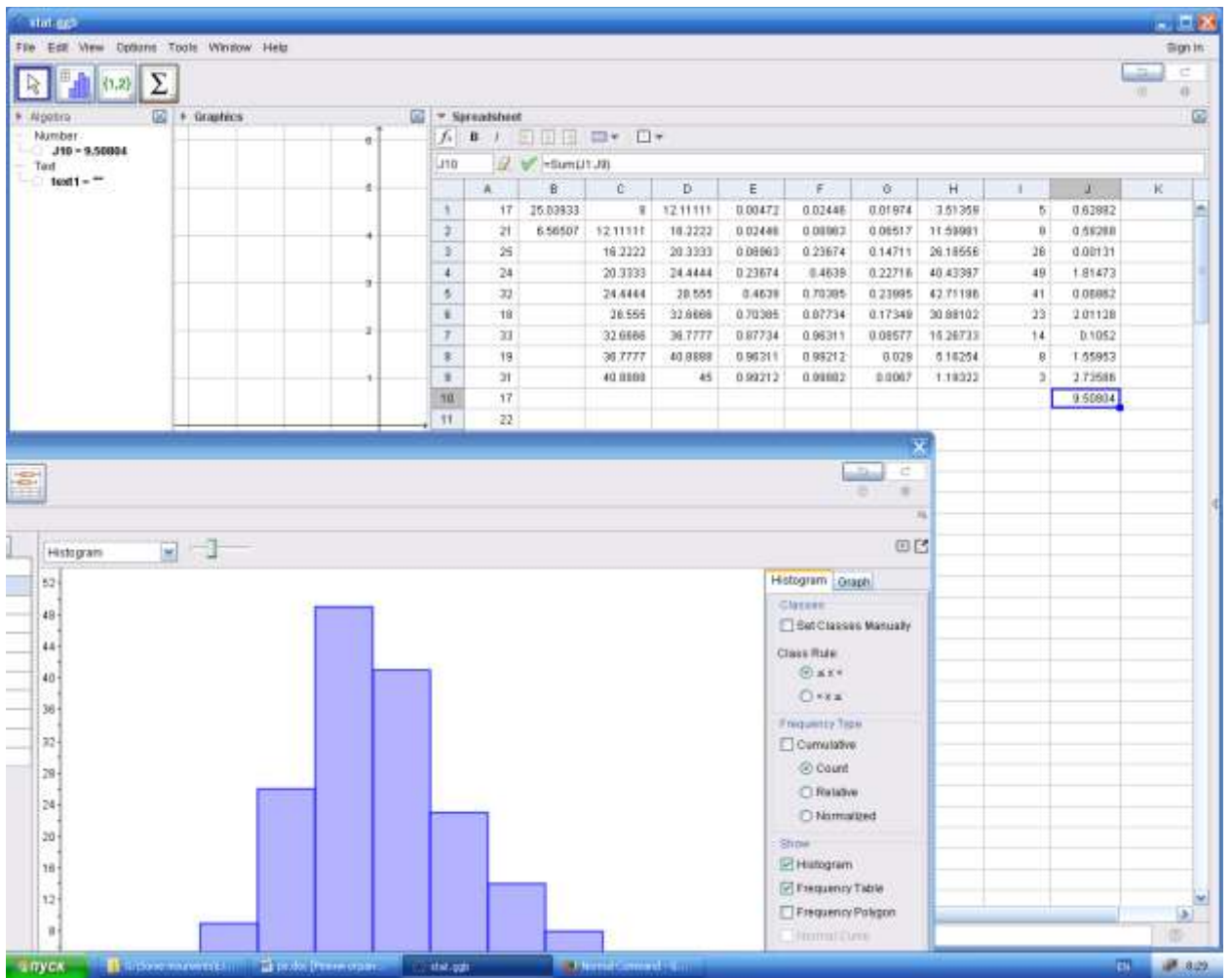


Рис.8

В ячейку J1 вводим формулу $(I1 - N1)^2 / N1$ и копируем ее на диапазон J1:J9 . Сумму этих значений записываем в ячейку J10

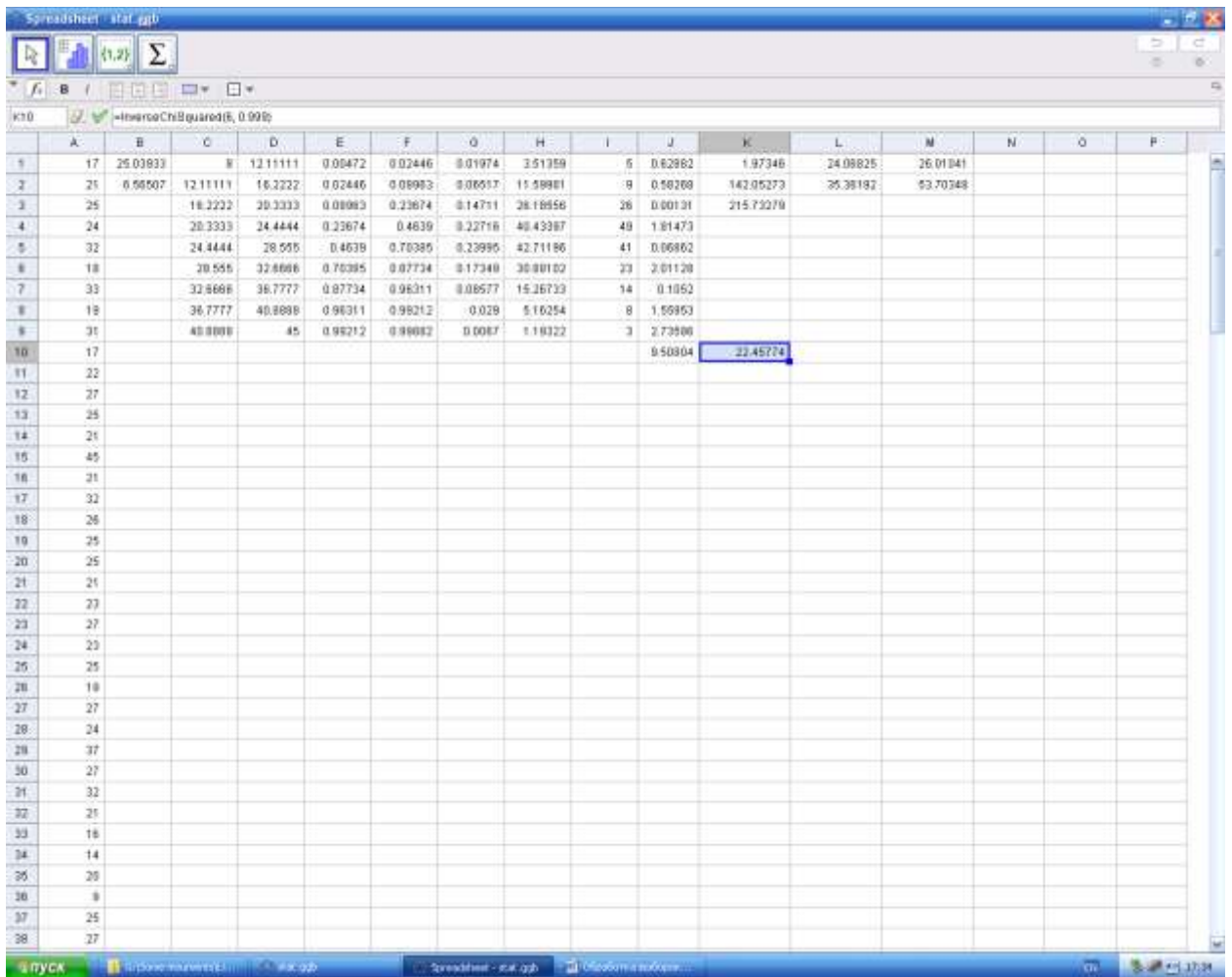


Рис.9

В ячейку K10 вводим формулу $\text{InverseChiSquared}(6,0.999)$, что соответствует числу степеней свободы 6 и уровню значимости 0.001

Поскольку значение статистики в ячейке J9 меньше K10 нет оснований отвергать гипотезу о нормальности генеральной совокупности.

В ячейку K1 вносим формулу $\text{InverseTDistribution}(177, (1 + 0.95) / 2)$, а в ячейки L1 и M1 соответственно формулы $B1 - K1 \cdot B2 / \text{sqrt}(178)$ и $B1 + K1 \cdot B2 / \text{sqrt}(178)$ тем самым построена интервальная оценка для генерального среднего значения.

В ячейку K2 вводим формулу $\text{InverseChiSquared}(177, (1 - 0.95) / 2)$

В ячейку K3 вводим формулу $\text{InverseChiSquared}(177, (1 + 0.95) / 2)$

Доверительный интервал для дисперсии записан в ячейках L2, M2 в которые необходимо вписать формулы $177B2^2 / K3$ и $177B2^2 / K2$ соответственно.