Лаборатория прикладной математики.

Метод наименьших квадратов.

1. Введение

На практике наиболее часто в качестве аппроксимирующих функций используются многочлены по степеням независимого аргумента. Причем, как правило, выбираются многочлены невысоких степеней. Это связано с тем, что в процессе решения системы нормальных уравнений ошибки во входной информации и ошибки округлений значительно преумножаются.

Выпишем широко применяемую на практике систему нормальных уравнений для линейной зависимости $y = a_0 + a_1 x$:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \tag{1}$$

Среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формуле

$$\sigma_1 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ y_{iэ} - (a_0 + a_1 x_i) \ {}^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

Для квадратичной зависимости $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Среднее квадратическое отклонение рассчитывается так

$$\sigma_2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[y_{iэ} - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2) \right]^2 \right)^{1/2} \tag{4}$$

В качестве простого примера применим метод наименьших квадратов для определения коэффициентов линейной зависимости $y = a_0 + a_1 x$ по данным таблицы 1.Вычислим среднее квадратическое отклонение расчетных значений от табличных.

Таблица 1

x_i	1	2	3	4	5
$y_{iэ}$	1,35	2,16	2,63	3,13	3,91

С целью уменьшения объёма вычислений исходную таблицу удобно преобразовать, введя так называемый «ложный нуль», т.е. новое положение начала координат. В качестве «ложного нуля» целесообразно принять значение x_i, которое расположено в центре таблицы.

Пусть $z_i = x_i - 3$, тогда таблица 1 преобразуется в таблицу 2. В последнюю включим данные, необходимые для составления системы нормальных уравнений (1).

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	Σ
z_i	–2	–1	0	1	2	0
y_i	1,35	2,16	2,63	3,13	3,91	13,18
z_i^2	4	1	0	1	4	10
$z_i y_i$	–2,7	–2,16	0	3,13	7,82	6,09

Система нормальных уравнений имеет вид $(n = 5)$:

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 = 13,18 \\ 0a_0 + 10a_1 = 6,09 \end{cases}.$$

Решение этой системы: $a_0 = 2,636$, $a_1 = 0,609$. Отсюда получается следующая зависимость: $y = a_0 + a_1 z = 2,636 + 0,609z$. Переходя к координате x, запишем следующее выражение для y: $y = 2,636 + 0,609(x-3) = 0,809 + 0,609x$.

Найдём среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \left[\frac{1}{5}((1,35 - 0,809 - 0,609\cdot 1)^2 + \ldots + (3,91 - 0,809 - 0,609\cdot 5)^2)\right]^{1/2} \approx 0,098$$

2. Задание

Для данной системы семи точек A_0(-3; N+13), $A_1(-2;-2N-1)$, $A_2(-1;-N+1)$, $A_3(0;N+4)$, $A_4(1;-N-1)$, $A_5(2;3N+1)$, A_6(3;N-13) ,где N –номер варианта:

1. Подобрать по методу наименьших квадратов линейную $y = a_0 + a_1 x$ и квадратичную $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ зависимости и рассчитать средние квадратические отклонения.
2. На одном рисунке изобразить табличные точки, участок прямой $y = a_0 + a_1 x$ и участок параболы $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.