Лаборатория прикладной математики.

Численное интегрирование.

1. Введение

Основная идея приближенного вычисления определенного интеграла заключается в том, что подынтегральную функцию заменяют другой, близкой к ней функцией, первообразная которой легко находится элементарным образом.

Обычно в качестве «близкой» функции берут интерполяционный многочлен $P_m(x)$ невысокой степени m. Тогда приближенно принимают

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx\,. \qquad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что отрезок интегрирования $[a,b]$ разбит с постоянным шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$ на n частей.

Формула центральных прямоугольников имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \quad y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{i+1/2} + \ldots + y_{n-1/2} \quad = I_ц\,, \qquad (2)$$

где $y_{i+1/2} = f(x_{i+1/2})$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_{i+1/2} = x_i + h/2$

Погрешность оценивается по формуле

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_ц\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} = \frac{M_2(b-a)h^2}{24}\,, \qquad (3)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$.

Формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + y_n + \ldots + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})) = I_{тр}\,. \qquad (4)$$

Погрешность оценивается по формуле

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_{\text{тр}}\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{M_2(b-a)h^2}{12}, \tag{5}$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$.

Формула Симпсона записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\ (y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\ = I_c, \tag{6}$$

где

$$n = 2m,\ y_0 = f(a),\ y_{2m} = f(b),\ y_i = f(x_i),\ i = \overline{1, 2m-1}.$$

Погрешность оценивается с помощью формул:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_{\text{с}}\right| \le \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4} = \frac{M_4(b-a)h^4}{180}, \tag{7}$$

где $M_4 = \max\limits_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Приведенные оценки (3),(5) и (7) являются теоретическими .На практике же для оценки погрешности численного интегрирования широко применяется приближенное правило Рунге. Суть его состоит в том, что интеграл вычисляется по выбранной формуле (2),(4) или (6) дважды: один раз с шагом h, затем с шагом $h/2$. При этом погрешность вычисляется по формуле Рунге:

$$R \approx \frac{\left|I_h - I_{h/2}\right|}{2^k - 1}, \tag{8}$$

где I_h – приближенное значение интеграла с шагом h, $I_{h/2}$ – приближенное значение интеграла с шагом $h/2$, k – порядок метода, который определяется степенью шага в формулах погрешностей усечения (3), (5) и (7). Для метода центральных прямоугольников и метода трапеций $k = 2$, для метода Симпсона $k = 4$.

Вычисление интеграла с заданной точностью ε проводится по следующему алгоритму:

– интеграл вычисляется по одной из указанных выше формул с шагом h и

$h/2$;

– вычисляется погрешность R по Рунге (8);

– если $R \le \varepsilon$, то вычисления прекращают, полагая

$$\int_a^b f(x)dx = I_{h/2},$$

– если $R > \varepsilon$, то вычисления повторяются с шагом $h/4$ и сравниваются $I_{h/2}$ и т.д.

2. Задание

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с шагом $h = 0{,}1$, используя формулы:

а) центральных прямоугольников (2);
б) трапеций (4);
в) Симпсона (6).

Оценить погрешность всех результатов, пользуясь правилом Рунге (8).

1. $\int_0^2 arctg(x^2)dx$.
2. $\int_1^3 \frac{\sin x^2}{x^2}dx$.
3. $\int_{0,5}^{2,5} \cos\sqrt{x}\,dx$.
4. $\int_0^2 \sin(\sqrt{x})dx$.
5. $\int_{0,1}^{2,1} \frac{\sin 5x}{x}dx$.
6. $\int_0^2 e^{-0,1x^2}dx$.
7. $\int_{0,1}^{2,1} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.
8. $\int_1^3 x\,arctg\sqrt{x}dx$.
9. $\int_0^2 xe^{-\sqrt{x}}dx$.
10. $\int_0^2 \sin(x^2)dx$.
11. $\int_0^2 \cos(x^2)dx$.
12. $\int_0^2 e^{\sin x}dx$.
13. $\int_0^2 \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})dx$.
14. $\int_0^2 \sqrt{x}\sin(\sqrt{x})dx$.
15. $\int_0^2 e^{\cos x}dx$.
16. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx$.
17. $\int_0^2 \sqrt[3]{1+x^2}dx$.
18. $\int_0^2 \sqrt{x}e^{x}dx$.
19. $\int_0^2 \cos(e^{-x})dx$.
20. $\int_0^2 \sqrt{1+e^x}dx$.
21. $\int_0^2 \sqrt{2+\sin x}dx$.
22. $\int_0^2 \sqrt{3+\cos x}dx$.
23. $\int_0^2 x\sqrt{4+\sin x}dx$.
24. $\int_0^2 x\sqrt{2+x^3}dx$.
25. $\int_0^2 \sqrt{\sin x}dx$.