Лаборатория прикладной математики.

Конечные матричные игры с нулевой суммой .

1.Введение

1. Стратегией игрока называют совокупность действий (ходов), допустимых правилами данной игры, приводящая к окончанию игры.
2. Если сумма выигрышей игроков А и В равна нулю (отрицательный выигрыш означает проигрыш), игра называется игрой с нулевой суммой.
3. *Платёжная матрица.* Пусть игрок А имеет стратегии $A_1, A_2, \ldots$; игрок В – $B_1, B_2, \ldots$ Обозначим a_{ij} выигрыш игрока А, если он применяет стратегию A_i, а игрок В свою стратегию B_j. Для обзора данной игры удобно ввести в рассмотрение платёжную матрицу.

A \ B			**B_j**	
	...	...	...	...
	...	...	...	...
A_i	...	...	**a_{ij}**	...
	...	...	...	...
	...	...	...	...

4. Если игра представима в форме конечной платёжной матрицы, то её называют конечной матричной игрой с нулевой суммой.

5. *Решение конечных матричных игр в чистых стратегиях.*

С точки зрения игрока А наиболее оптимальная стратегия определяется по принципу максимина, т.е. игрок А выбирает ту стратегию A_i при которой $\min\limits_j a_{ij}$ максимален. Пусть:

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = a\,.$$

С точки зрения игрока В выгодно подчиняться принципу минимакса, т.е. игрок В избирает стратегию B_j при которой $\max_i a_{ij}$ минимален. Обозначим:

$$\min_j(\max_i a_{ij}) = b.$$

Нетрудно убедиться, что всегда b≥a. Если выполняется равенство b=a, то говорят, игра имеет седловую точку. Пару стратегий (A_i, B_j) на которой достигается равенство b=a, называют решением матричной игры в чистых стратегиях. В случае b>a игра не имеет решения в чистых стратегиях.

6. *Решение конечных матричных игр в смешанных стратегиях.*

Смешанной стратегией игрока А называют неотрицательный вектор $P^T = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $p_i \geq 0$ такой, что $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, где m – количество стратегий игрока А. Аналогично определяется смешанная стратегия игрока В: $Q^T = (q_1, q_2, ..., q_m)$, $q_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, где n – число стратегий игрока В.

В случае применения смешанных стратегий игрок А также должен придерживаться принципа максимина. Тогда его выигрыш будет равен:

$$\max_{p_i \geq 0: \sum_{i=1}^{m} p_i = 1} \left(\min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \right) = a.$$

Аналогично, игрок В подчиняется принципу минимакса и его выигрыш составит:

$$\min_{q_j \geq 0: \sum_{j=1}^{n} q_j = 1} \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right) = b.$$

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называется пара векторов (P^T, Q^T), при которых b=a.

7. *Решение матричных игр с помощью методов линейного программирования.*

Сведём задачу поиска смешанной стратегии для игрока А к задаче линейного программирования . Из принципа максимина следует:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot a_{ij} \ge a_0,\ j=1,2,\ldots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ a_0 = \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot a_{ij}.$$

Будем считать $a_{ij} > 0$ (этого всегда можно добиться путём прибавления к платёжной матрице некоторой постоянной положительной матрицы).

Пусть $z = 1/a_0$, $x_i = p_i / a_0$. Поскольку вектор P^T нужно выбрать так, чтобы $\max\limits_{P^T:\sum_{i=1}^{m} p_i = 1} a_0 = a$, то возникает типичная задача линейного программирования: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i \ge 1$, j=1,2,…,n; $z = \sum_{i=1}^{m} x_i\,(\min)$.

Если последняя задача будет решена, то решение матричной игры рассчитывают по формулам: $a_0 = 1/z_{\min}$; $p_i = a_0 \cdot x_i$.

Аналогично строится задача линейного программирования для игрока B:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \cdot a_{ij} \le b_0,\ (b_0 = \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot a_{ij}),\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Пусть $w = 1/b_0$, $y_j = q_j / b_0$, тогда: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \le 1$, i=1,2,…,m;

$w = \sum_{j=1}^{n} y_j\,(\max)$. Вектор смешанных стратегий для игрока B рассчитывают по формулам: $b_0 = 1/w_{\max}$, $q_j = b_0 \cdot y_j$.

Нетрудно заметить, что построенные задачи линейного программирования для игроков A и B являются взаимно двойственными. Очевидно, что О.Д.Р. задачи линейного программирования для игрока B – ограниченное множество. Поэтому эта задача имеет решение. В силу принципа двойственности имеет также решение и задача для игрока A, причём $z_{\min} = w_{\max}, \Rightarrow a=b$. Тем самым доказан основной результат теории конечных матричных игр:

Теорема Неймана. Всякая конечная матричная игра имеет решение либо в чистых стратегиях, либо в смешанных стратегиях.

8. В качестве примера рассмотрим матричную игру с платёжной матрицей:

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Прибавим ко всем элементам этой матрицы число «3» (после этой операции получится новая платёжная матрица с *положительными* значениями).

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

В соответствии с указаниями п.7 для игрока В получаем задачу линейного программирования.

$$2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + y_3 \le 1$$
$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \le 1$$
$$5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 6 \cdot y_3 \le 1$$
$$w = -y_1 - y_2 - y_3 (\min).$$

Вводим дополнительные переменные: $y_4, y_5, y_6 \ge 0$, получаем каноническую форму задачи линейного программирования для игрока В.

$$2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + y_3 + y_4 = 1$$
$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + y_5 = 1$$
$$5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 6 \cdot y_3 + y_6 = 1$$
$$w = -y_1 - y_2 - y_3 (\min).$$

К этой задаче применяем симплекс-метод .

Базис	**Значение**	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**y_4**	**y_5**	**y_6**
y_4	1	2	5	1	1	-	-
y_5	1	6	4	2	-	1	-
y_6	1	5	2	6	-	-	1

-w	0	-1	-1	-1	-	-	-

Вводим в базис переменную y_1 вместо y_5.

Базис	**Значение**	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**y_4**	**y_5**	**y_6**
y_4	2/3	-	5-4/3= =11/3	1/3	1	-1/3	-
y_1	1/6	1	2/3	1/3	-	1/6	-
y_6	1/6	-	2-10/3= =-4/3	6-5/3= =13/3	-	-5/6	1
-w	1/6	-	-1/3	-2/3	-	1/6	-

Вместо y_6 в базис входит переменная y_3.

Базис	**Значение**	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**y_4**	**y_5**	**y_6**
y_4	17/26	-	49/13	-	1	-7/26	-1/13
y_1	2/13	1	10/13	-	-	3/13	-1/13
y_3	1/26	-	-4/13	1	-	-5/26	3/13
-w	5/26	-	-7/13	-	-	1/26	2/13

Вводим в базис y_2 вместо y_4.

Базис	**Значение**	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**y_4**	**y_5**	**y_6**
y_2	17/98	-	1	-	13/49	-1/14	-1/49
y_1	2/98	1	-	-	-10/49	2/7	-3/49
y_3	9/98	-	-	1	4/49	-3/14	11/49
-w	2/7	-	-	-	1/7	0	1/7

Поскольку коэффициенты при целевой функции w неотрицательны, вычислительный процесс останавливается. Для игрока B получено решение: $w_{max}=2/7$, $q_1=1/14$, $q_2=17/28$, $q_3=9/28$.

Итак, вектор смешанных стратегий для игрока B:

$$Q^T=(2/28;17/28;9/28).$$

Попутно найден вектор смешанных стратегий для игрока A. Для этого используем коэффициенты при w в *последней таблице*, а также учитываем соответствие $y_4 \to x_1$, $y_5 \to x_2$, $y_6 \to x_3$. Таким образом, вектор смешанных стратегий для игрока A равен:

$$P^T=(7/2\cdot 1/7;0;7/2\cdot 1/7)=(1/2;0;1/2).$$

Если на первом шаге вычислений вводить в базис переменную y_2 (или y_3), то нетрудно убедиться в том, что имеется другое решение матричной игры.

$$Q_1^T=(0;5/8;3/8),$$

$$P^T=(1/2;0;1/2).$$

Следовательно, самое общее решение рассматриваемой задачи представимо в виде:

$$Q^T_{общ} = \alpha \cdot Q^T + (1-\alpha)\cdot Q^T_1, 0 \le \alpha \le 1,\ P^T=(1/2;0;1/2).$$

Рассчитаем цену игры (средний выигрыш игрока А):

$$s = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j = 2\cdot 1/2\cdot 0 + 5\cdot 1/2\cdot 5/8 + \ldots + 6\cdot 1/2\cdot 3/8 - 3 = 1/2 > 0.$$

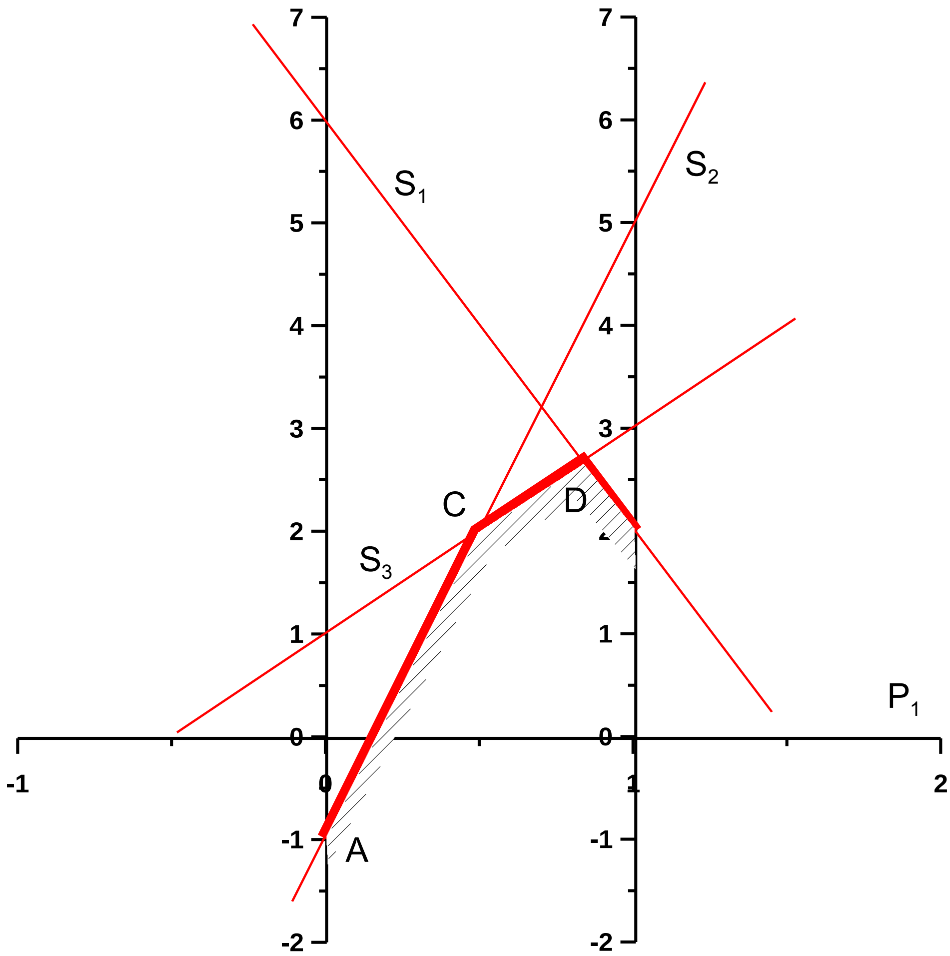
9. *Геометрическое решение игровых задач с 2*n матрицами.*

Рассмотрим матричную игру:

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

На диаграмме (рис.1) построим отрезки $s_1=2\cdot p_1+6\cdot p_2$; $s_2=5\cdot p_1-p_2$; $s_3=3\cdot p_1+p_2$.

Рис.1.



Нижняя огибающая выделена жирным шрифтом. Необходимо определить значение p_1, при котором нижняя огибающая принимает своё наибольшее значение. В этом состоит геометрическая реализация принципа максимина (см. п.6 этой главы).

Из диаграммы видно, что точка D является искомой. Для определения p_1 решаем систему:

$$s_1=s_3$$
$$p_1+p_2=1.$$

После исключения p_2, получаем уравнение:

$$2\cdot p_1+6\cdot(1-p_1)=3\cdot p_1+1-p_1\Rightarrow$$
$$p_1=5/6,\ p_2=1/6.$$

Таким образом, игрок А с вероятностью 5/6 должен применять свою первую стратегию, и лишь с вероятностью 1/6 – вторую. Найдём решение игры для игрока В. Поскольку точка D получается при пересечении s_1 и s_3, следовательно, $q_2=0$. Для определения q_1, q_3 составляем и решаем систему линейных уравнений:

$$2\cdot q_1+3\cdot q_3=6\cdot q_1+q_3,$$
$$q_1+q_3=1.$$

Исключаем из системы q_3, получаем:

$$2\cdot q_1+3\cdot(1-q_1)=6\cdot q_1+1-q_1\Rightarrow$$
$$q_1=2/6,\cdot q_3=4/6.$$

Таким образом, решение матричной игры даётся двумя векторами:

$$A:\ P^T=(5/6,\ 1/6),\ B:\ Q^T=(2/6,0,4/6).$$

2. Задание

Найти решение матричной игры геометрическим способом.

1	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4.1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 6.5 & 5 & 2 \\ 1 & 1.2 & 1.5 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 5.2 & 4.5 & 1.2 \\ -1 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3.2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 5.1 & 4 & 1.3 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3.2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1.5 \\ 7 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4.1 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0.9 \\ 5 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1.1 & 3.5 & 0.7 \\ 4.2 & -2 & 0.5 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1.2 & 3.7 & 1.6 \\ 4.5 & -1.5 & 0.4 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1.5 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1.8 & 3.5 & 2.7 \\ 5 & -1.7 & 0.2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1.5 & 4 & 2 \\ 6.3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 1.5 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1.5 \\ 6.5 & -1 & 1.2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 0.9 & 2.9 & 0.9 \\ 4.9 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0.9 & 4.9 & 1.5 \\ 6.4 & -1 & 1.1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1.4 & 3.9 & 2 \\ 6.2 & -1.9 & 1 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1.9 & 5.1 & 2.9 \\ 6.9 & 1.1 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1.1 & 3.6 & 1.5 \\ 4.4 & -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1.6 \\ 6.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решить матричную игру, применяя симплекс-метод.

(*После заполнения платежной матрицы обязательно жмем кнопку 'SAVE MATRIX' ,затем нажимаем кнопку 'RUN'*)

1	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

2	$\begin{pmatrix} 11 & -10 & 12 \\ 9 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 8 & 12 & -10 \\ 11 & -7 & 5 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -5 & 6 & 8 \\ -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 10 & -7 & 5 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

12	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 8 & 11 & -9 \\ 10 & -7 & 5 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$