Лаборатория прикладной математики.

Вычисление погрешностей функций.

1. Введение

Абсолютной погрешностью некоторой величины называется взятая по модулю разность между ее точным A, и приближенным a числовыми значениями

$$\Delta_a = |A - a| \tag{1}$$

Относительной погрешностью некоторой величины называется выраженное в процентах отношение ее абсолютной погрешности к модулю приближенного числового значения

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \cdot 100\%,\ |a| \neq 0 \tag{2}$$

Значащими цифрами числа называются все его цифры в десятичном изображении, кроме нулей слева. Например, у числа 1030,50 все цифры значащие, а у числа 0,0103050 только подчеркнутые цифры являются значащими.

Значащая цифра приближенного числа называется верной в широком смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы десятичного разряда, которому принадлежит рассматриваемая цифра.

Абсолютная погрешность функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ нескольких приближенно заданных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, имеющих соответствующие абсолютные погрешности $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n}$, вычисляется по формуле:

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \Delta_{x_1} + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| \Delta_{x_2} + \ldots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right| \Delta_{x_n}. \tag{3}$$

2. Задание

Вычислить значение функции трех переменных $z = z(x_1, x_2, x_3)$ при заданных значениях аргументов x_1, x_2, x_3, считая их верными в написанных знаках.

Оценить абсолютную и относительную погрешности результата, указать верные знаки в вычисленном значении функции.

1. $z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^4 + 2x_1^2 x_2 x_3 - 4x_1^3 x_2^2 - 2x_1$;
$x_1 = 1{,}001$; $x_2 = 0{,}025$; $x_3 = 10{,}001$.

2. $z(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_2 x_3}$;
$x_1 = -10{,}1$; $x_2 = 4{,}3$; $x_3 = 1{,}1$.

3. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$;
$x_1 = -18{,}1$; $x_2 = 1{,}4$; $x_3 = 40{,}01$.

4. $z(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{e^{x_1} - e^{x_2}}\sqrt{x_3}$;
$x_1 = 1{,}02$; $x_2 = 1{,}01$; $x_3 = 4{,}14$.

5. $z(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_2^2 - 4x_3^3 x_2^2$;
$x_1 = 1{,}05$; $x_2 = 0{,}25$; $x_3 = 2{,}01$.

6. $z(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3}$;
$x_1 = 3{,}28$; $x_2 = 0{,}932$; $x_3 = 1{,}132$.

7. $z(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 + x_2 x_1 + x_3 x_1$;
$x_1 = 2{,}104$; $x_2 = 1{,}935$; $x_3 = 0{,}845$.

8. $z(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{2^{\sqrt{x_1}} + 3^{\sqrt{x_3}}}{x_3}$;
$x_1 = 3{,}18$; $x_2 = 4{,}21$; $x_3 = 5{,}13$.

9. $z(x_1, x_2, x_3) = \ln x_1 \sin(x_2 + x_3)$;
$x_1 = 3{,}4$; $x_2 = 5{,}95$; $x_3 = 3{,}80$.

10. $z(x_1, x_2, x_3) = \ln(\sin(x_3) + x_2) - x_1$;
$x_1 = 2{,}0$; $x_2 = 1{,}0$; $x_3 = 3{,}14$.

11. $z(x_1, x_2, x_3) = x_3 \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
$x_1 = -3{,}1$; $x_2 = 4{,}05$; $x_3 = 40{,}01$.

12. $z(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2} + x_2^{x_3}$;
$x_1 = 3{,}0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2{,}01$.

13. $z(x_1, x_2, x_3) = \cos\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$;
$x_1 = -1{,}1$; $x_2 = 2{,}14$; $x_3 = 3{,}201$.

14. $z(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} \ln(x_1^2 + x_3^3)$;
$x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 2{,}05$; $x_3 = 1{,}01$.

15. $z(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^3-x_2^2}{x_3+x_2}$;

$x_1=2,28;\ x_2=0,9;\ x_3=1,132$.

16. $z(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_3+x_2^2}$;

$x_1=1,48;\ x_2=1,8;\ x_3=1,1$.

17. $z(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2}{x_3}}$;

$x_1=1,41;\ x_2=22,8;\ x_3=1,1$.

18. $z(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}$;

$x_1=0,25; x_2=10,8; x_3=25,11$.

19. $z(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{\dfrac{x_1^2-x_3}{x_3-x_2}}$;

$x_1=5,41;\ x_2=0,08;\ x_3=1,1$.

20. $z(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2^2+x_3^3$;

$x_1=0,4;\ x_2=2,8;\ x_3=1,5$.

21. $z(x_1,x_2,x_3)=x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}$;

$x_1=3,11;\ x_2=4,08;\ x_3=5,1$.

22. $z(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3^2+x_1^3$;

$x_1=1,4;\ x_2=2,8;\ x_3=4,2$.

23. $z(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2x_2^2+x_3x_2^3}$;

$x_1=2,11;\ x_2=4,18;\ x_3=7,1$.

24. $z(x_1,x_2,x_3)=x_1^2e^{x_2x_3^2}$;

$x_1=10,4;\ x_2=0,5;\ x_3=4,1$.

25. $z(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_3^2)arctg\ \sqrt{x_2}$;

$x_1=1,4;\ x_2=4,001;\ x_3=2,5$.

3. Пример выполнения работы.

Вычислить $u=x^2y-xy-3x+2y-1$, найти абсолютную и относительную погрешности результата, если аргументы x и y верны в написанных знаках x =1,01, y =20,2.

Решение

Поскольку x верно в написанных знаках, то абсолютная погрешность Δ_x не может превышать единицы младшего разряда, которому принадлежит верная цифра, отсюда $\Delta_x = 0{,}01$; аналогично получим, что $\Delta_y = 0{,}1$. Найдем абсолютную погрешность

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\Delta_y = \left|2xy - y - 3\right|\Delta_x + \left|x^2 - x + 2\right|\Delta_y = 0{,}37705 \le 0{,}38\,.$$

Заметим, что абсолютную погрешность не следует записывать более, чем с двумя-тремя значащими цифрами (абсолютные погрешности при отбрасывании «лишних» знаков можно только увеличивать!).

Вычислим теперь значение функции

$$u(1{,}01; 2{,}02) = 36{,}57402 \approx 36{,}57\,.$$

В приближенном числе не следует сохранять те разряды, которые отбрасываются при вычислении абсолютной погрешности.

Найдем относительную погрешность, причем запись ее не будет содержать более трех значащих цифр.

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|}\cdot 100\% = \frac{0{,}38}{36{,}57}\cdot 100\% = 1{,}039013\% \le 1{,}04\,\%.$$

Ответ: $u \approx 36{,}57 \pm 0{,}38 = 36{,}57(1 \pm 1{,}04\%)$.