Лаборатория прикладной математики.

Численное решение нелинейных уравнений.

1. Введение

Чтобы найти с заданной точностью (абсолютной погрешностью) ε за конечное число операций корни уравнения

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

сначала проводят процедуру их отделения ,используя следующие простое предложение. Если выполняются условия:

а) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a,b]$,

б) функция $f(x)$ строго монотонна на отрезке $x \in [a,b]$,

в) на концах отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на отрезке $[a,b]$ уравнение (1) имеет единственный корень.

Затем для уточнения отделенных корней используют метод бисекции (метод половинного деления отрезка), метод простой итерации, метод Ньютона (метод касательных) и др.

Опишем коротко эти наиболее распространенные методы.

Метод бисекции

Отрезок локализации корня $[a,b]$ на каждом шаге делят центральной точкой $c = 0{,}5 \cdot (a+b)$ на два равных отрезка $[a,c]$ и $[c,b]$, затем вычисляют $f(c)$ и <u>исключают</u> из дальнейшего рассмотрения тот отрезок, на концах которого функция имеет значения одинаковых знаков. С отрезком, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, процедуру деления повторяют. Процесс продолжается до тех пор, пока длина получившегося отрезка $[a_n, b_n]$, где $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, не станет меньше удвоенной заданной точности

$$|b_n - a_n| < 2\varepsilon. \tag{2}$$

За приближенное значение корня принимается середина этого отрезка

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}. \tag{3}$$

Априорную оценку количества итераций, необходимых для достижения требуемой точности, можно произвести на основании следующего неравенства

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}, \tag{4}$$

где x^* – истинное значение корня ($f(x^*) = 0$), n – количество итераций (шагов деления). Из (4) следует, что точность ε будет достигнута, если количество шагов n будет ближайшим натуральным числом, большим, чем $\ln((b-a)/\varepsilon)/\ln 2 - 1$.

Метод простой итерации

Для того чтобы применить метод простой итерации, исходное уравнение (1) следует на отрезке локализации корня $[a,b]$ привести к виду

$$x = \varphi(x) \qquad (x \in [a,b]) \tag{5}$$

так, чтобы выполнялось условие

$$\max_{x\in[a,b]} \left|\varphi'(x)\right| \le q < 1. \tag{6}$$

Итерационная последовательность метода простой итерации строится по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,..., \tag{7}$$

где n – номер итерации, а начальное приближение x_0 выбирается произвольно из отрезка локализации корня.

Имеют место следующие оценки абсолютной погрешности

$$\left|x_n - x^*\right| \le q^n \left|x_0 - x^*\right|, \tag{8}$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|, \tag{9}$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{q^n}{1-q}\left|x_1 - x_0\right|. \tag{10}$$

Геометрически сходящийся итерационный процесс проиллюстрирован на рисунках 1 и 2.

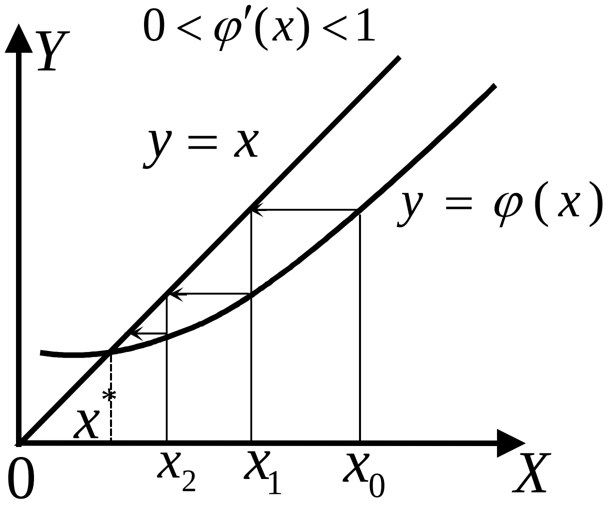

Рис. 1

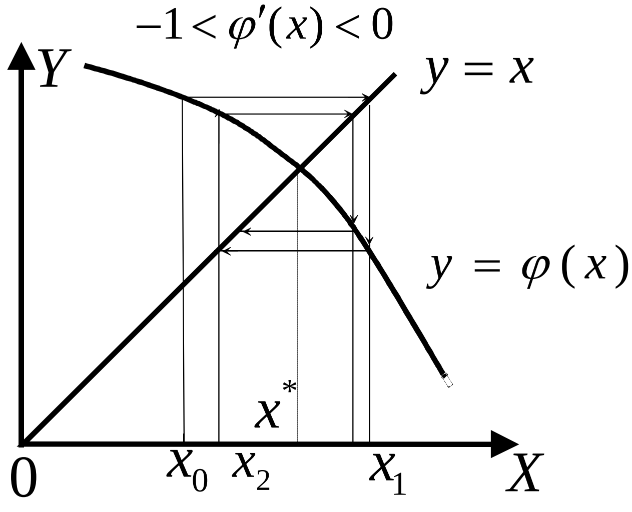

Рис. 2

Метод Ньютона

Если в каждой точке отрезка $[a,b]$ локализации корня уравнения (1) функция $f(x)$ имеет производную, сохраняет направление выпуклости и строго монотонна на отрезке $[a,b]$,то в качестве приближения к корню x^* можно взять точку пересечения касательной, проведенной на одном из концов отрезка, с осью абсцисс. На рисунках 3 и 4 видно, что в случае вогнутой кривой $(f''>0)$ касательную следует проводить в том конце $[a,b]$, где функция принимает положительное значение; для выпуклой кривой $(f''<0)$ приближение к корню достигается при использовании касательной на том конце отрезка, где функция имеет отрицательное значение, т.е. в качестве x_0 берется тот конец отрезка локализации корня, для которого выполняется неравенство

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0. \tag{11}$$

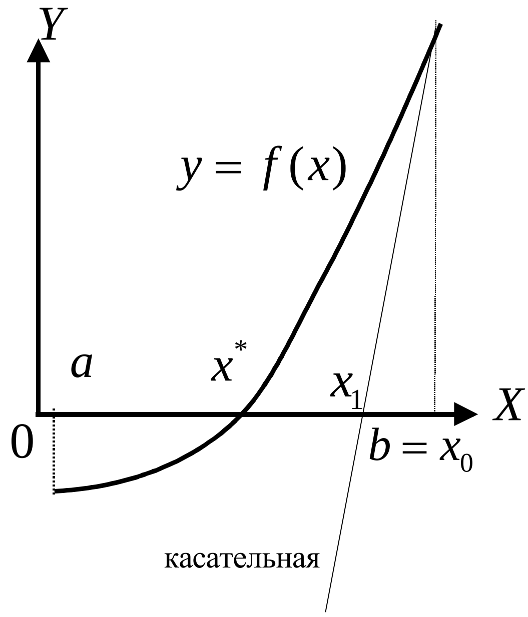

Рис. 3

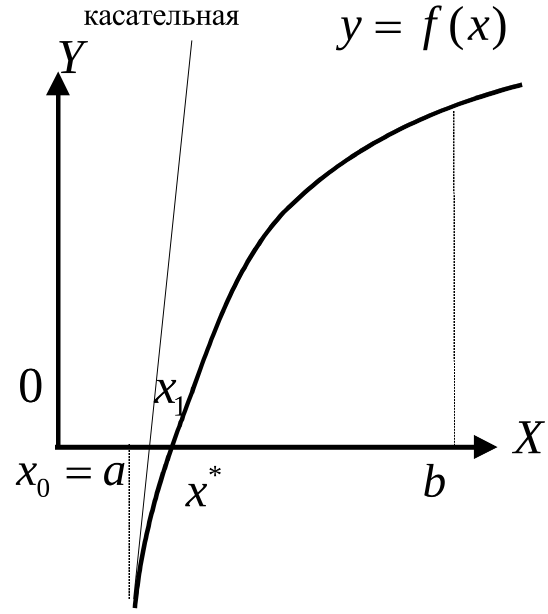

Рис. 4

Итерационная последовательность имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,1,2,\ldots \tag{12}$$

Если же на отрезке локализации корня не выполнены условия на функцию $f(x)$ (строгая монотонность, направление выпуклости), то может возникнуть зацикливание процесса отыскания корня (рис. 5).

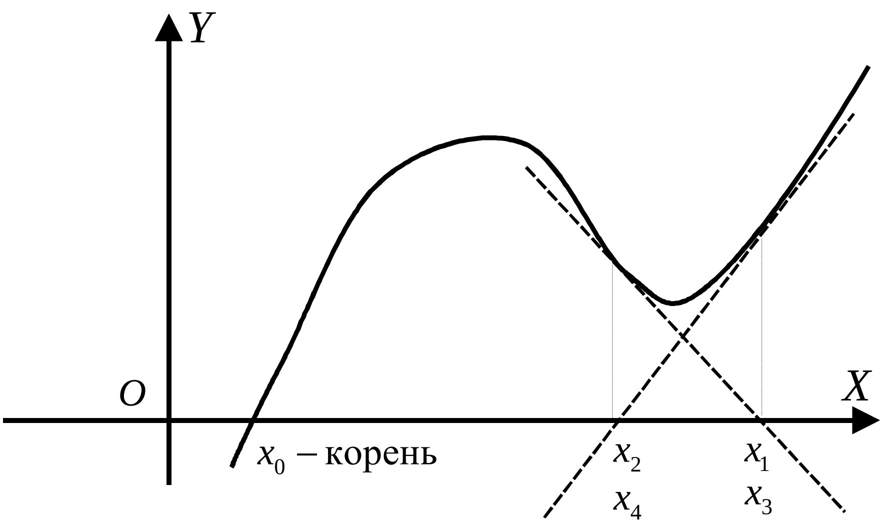

Рис. 5

2. Задание

Локализовать корни. Найти решение нелинейного уравнения методами бисекции, простых итераций, Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$.

1. $\ln(x - x^2) - x\sqrt{x} + 2 = 0$.
2. $x^2 + e^{-x} - 2 = 0$.
3. $(x-2)^2 - \ln x = 0$.
4. $(e^x - 1) - \dfrac{1}{x} = 0$.
5. $e^{\sqrt{x}} - 3e^x + 7x + 1 = 0$.
6. $e^x - \sqrt{2 - x^2} = 0$.
7. $\sqrt{x+1} - 2\sin x = 0$.
8. $\sqrt{9 - x^2} - e^x - 1 = 0$.
9. $x^2 + 2x + e^{-(x+1)} - 1 = 0$.
10. $\ln x - 2 + x = 0$.
11. $\ln(2x - x^2) - \sqrt{x} + 2 = 0$.
12. $x^2 - x\ln x - 3x + 1 = 0$.
13. $e^x - 3\sqrt{x} = 0$.
14. $\log_{0,5} x - \sqrt{x} = 0$.
15. $\lg(1 - x^2) - e^{-x} - 2 = 0$.
16. $x^3 - \log_{0,5} x = 0$.
17. $5x^2 - 10x - e^{-x} = 0$.
18. $x^2 - 0{,}2x - e^{\cos x} + 1{,}01 = 0$.
19. $2\cos x - \ln x = 0$.
20. $e^{\cos x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
21. $e^x - x - 2 = 0$.
22. $2(x+1)^2 + \sin(x-1) - 1 = 0$.
23. $\sqrt{x-2} - \ln x = 0$.
24. $2 - x^2 - \lg x = 0$.
25. $e^x - 5\sqrt{x} = 0$.