Лаборатория прикладной математики.

Линейная оптимизация. Транспортная задача.

1.Введение

1. Введём в рассмотрение два вида объектов. Назовём их условно «производители» и «потребители». «Производители» $A_i, i = 1,2,\dots,m$характеризуются своими объёмами производства $a_i, i = 1,2,\dots,m$. «Потребители» $B_j, j = 1,2,\dots,n$в свою очередь характеризуются своими объёмами потребления $b_j, j = 1,2,\dots,n$. Обозначим x_{ij}- количество товара, подлежащее доставке из i-го пункта производства A_iв j-ый пункт потребления B_j. Пусть также c_{ij}- стоимость перевозки единицы товара из A_iв B_j. Возникает следующая задача, которую принято называть транспортной. Определить неотрицательные перевозки x_{ij}, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\text{а) } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, j = 1,2,\dots,n.$$

$$\text{б) } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, i = 1,2,\dots,m.$$

$$\text{в) } z = \sum_{i,j} c_{ij} \cdot x_{ij}\,, (\min).$$

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$(суммарный объём производства равен суммарному объёму потребления), то транспортная задача называется сбалансированной. В случае дисбаланса задача может быть сбалансирована посредством введения фиктивных потребителей или производителей с нулевой стоимостью перевозок. Вследствие этого приёма в дальнейшем будем считать транспортные задачи сбалансированными. Транспортная задача представляет собой частный случай задачи ЛП, поэтому для её решения разработаны специальные методы.

Исходные данные транспортных задач удобно представлять в форме транспортных таблиц:

B_j / A_i	b_1	b_2	. . .	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

Прежде всего, необходимо найти опорное решение (опорный план перевозок). Для этого удобен, так называемый, метод наименьшей стоимости. Количество базисных переменных равно «m+n-1» (т.е. в оптимальном плане перевозок максимум «m+n-1» переменных x_{ij}отличны от нуля).

3. *Критерий оптимальности плана перевозок*

Для базисных клеток (т.е. тех клеток в которых на данном этапе вычислений располагаются базисные переменные) составляют вспомогательную систему уравнений:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ где}$$

u_i, v_j- двойственные переменные исходной задачи (вектор симплекс-множителей) . Если *для всех небазисных* клеток выполнены условия $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, то найденный план перевозок является оптимальным. В том случае, когда для некоторых *небазисных* клеток $c_{ij} - u_i - v_j < 0$выбирают клетку с наименьшей разностью и в нее заносят числовое значение,которое должно быть сбалансировано с помощью циклического обхода базисных клеток. Рассмотрим эту довольно сложную процедуру на примере.

Пример . Рассмотрим некоторый допустимый план и проверим его на оптимальность.

B_j / A_i	10	12	15
7	1	7 / 1	2
12	7 / 2	5 / 2	3
18	3 / 3	2	15 / 1

Для базисных клеток составим вспомогательную систему с двойственными переменными u_i, v_j:

$$u_1 + v_2 = 1$$
$$u_2 + v_1 = 2$$
$$u_2 + v_2 = 2$$
$$u_3 + v_1 = 3$$
$$u_3 + v_3 = 1.$$

Положим $u_1 = 0$, остальные переменные определяем из системы: $v_2 = 1, u_2 = 1, v_1 = 1, u_3 = 2, v_3 = -1$. Находим разности $c_{ij} - u_i - v_j$*для небазисных клеток и отрицательные* значения вписываем в левый нижний угол транспортной таблицы.

A_i \ B_j	10	12	15	
7	 1	7 1	 2	$u_1 = 0$
12	7 2	5 2	 3	$u_2 = 1$
18	3 3	 -1 2	15 1	$u_3 = 2$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = -1$	

Имеется одно отрицательное значение “-1” в клетке с адресом (3,2). Это указывает на то обстоятельство, что данное опорное решение не является оптимальным. Найдём теперь оптимальное решение . Для этого в клетку (3,2) вводим неотрицательную перевозку ε0. Для определения ε организуем цикл по *базисным клеткам*.

A_i \ B_j	10	12	15
7	 1	7 1	 2
12	7+ε 2	5-ε 2	 3
18	3-ε 3	ε 2	15 1

Максимально допустимое значение для ε равно 3. Получаем новое решение.

B_j / A_i	10	12	15
7	 1	7 1	 2
12	10 2	2 2	 3
18	 3	3 2	15 1

Составляем систему для определения u_i, v_j:

$$u_1 + v_2 = 1$$
$$u_2 + v_1 = 2$$
$$u_2 + v_2 = 1$$
$$u_3 + v_2 = 2$$
$$u_3 + v_3 = 1.$$

Решение этой системы:

$$u_1 = \mathbf{0}, \mathbf{v}_2 = 1, u_2 = 0, v_1 = 2, u_3.$$

Новая таблица с вписанными отрицательными разностями в свободных клетках имеет вид.

B_j / A_i	10	12	15	
7	 -1 1	7 1	 2	$u_1 = 0$
12	10 2	2 2	 3	$u_2 = 0$
18	 3	3 2	15 1	$u_3 = 1$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	

Организуем цикл из клетки (1,1):

B_j / A_i	10	12	15
7	ε 1	7-ε 1	2
12	10-ε 2	2+ε 2	3
18	3	3 2	15 1

ε=7

Получаем новую таблицу.

B_j / A_i	10	12	15
7	7 1	1	2
12	3 2	9 2	3
18	3	3 2	15 1

Это решение оптимально.

2. Задание

Решить транспортную задачу (n-номер варианта).

Сначала в консольном окне заполняем списки мощностей производителей и потребителей (данные вводятся в соответствии с указанным шаблоном). Верхнее поле предназначено для ввода стоимостей перевозок и самих перевозок. После ввода числового значения переводим указатель мыши в нужную клетку и нажимаем кнопку: левая кнопка-ввод перевозки; правая-ввод стоимости перевозки. Двойной клик левой кнопкой мыши удаляет перевозку из клетки. Для проверки допустимого плана на оптимальность жмем клавишу enter.

B_j / A_i	**536**	**129**	**137+n**	**83+2n**	**50**
194	2·n+1	25	10	15	50
151+n	12	40	35	15	25
237+3n	15	35	30	10	12
289	45	30	20	12	n+2