Лаборатория прикладной математики.

Линейная оптимизация. Симплекс-метод.

1.Введение

В задаче линейного программирования требуется найти неотрицательный вектор X: $X^T = (x_1, x_2, ..., x_p) \geq \vec{0}$ (т.е. все компоненты вектора неотрицательные действительные числа), который удовлетворяет двум условиям:

а) $A \cdot X \gtrless B$, где A – матрица m×p (m строк и p столбцов); B: $B^T = (b_1, b_2, ..., b_m) \geq \vec{0}$, (неотрицательный вектор, имеющий m компонент).

б) $z = C^T \cdot X = \sum_{i=1}^{p} c_i \cdot x_i$ =max(min) (целевая функция принимает своё наибольшее (наименьшее)значение), $C^T = (c_1, c_2, ..., c_p)$.

Все ограничения, записанные в форме неравенств в а) заменяются равенствами за счёт введения дополнительных неотрицательных переменных.

а) $A \cdot X = B$, A-матрица m×n;
$X^T = (x_1, x_2, ..., x_p, \underbrace{x_{p+1}, ..., x_n}_{\text{n-p дополнительных переменных}}) \geq \vec{0}$; $B^T = (b_1, b_2, ..., b_m) \geq \vec{0}$.

б) $z = C^T \cdot X = \min$, где $C^T = (c_1, c_2, ..., c_p, \underbrace{0, ..., 0}_{\text{n-p нулей}})$.

Область допустимых решений (О.Д.Р.) Ω задачи линейного программирования определяется равенством:

$$\Omega = \{X^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \geq \vec{0} : A \cdot X = B\}.$$

О.Д.Р. является выпуклым множеством.

Большое значение в решении ,поставленной задачи имеют *угловые точки:* $X \in \Omega$ – угловая точка, если её нельзя заключить внутри отрезка, целиком принадлежащего О.Д.Р.

Если задача ЛП имеет решение, то это решение совпадает с одной из угловых точек О.Д.Р. Ω.

Симплекс-метод – это алгебраический алгоритм перебора угловых точек данного Ω таким образом, что при переходе от одной точки к другой значение целевой функции не возрастает. Для инициализации симплекс-метода необходимо иметь начальную допустимую угловую точку (опорное решение).

Если в основной задаче ЛП все неравенства в ограничениях а) имеют знак ≤, то в этом случае нетрудно определить опорное решение. В качестве базисных переменных берут дополнительные переменные (m дополнительных переменных), остальные $n - m = p$ переменных (исходные переменные основной задачи ЛП) считаются свободными. При этом целевая функция изначально уже выражена через свободные переменные. В дальнейшем переходят к составлению симплекс-таблиц и последующим вычислениям,которые подробно описаны в http://www.fm.cdml.ru/otherfiles/lp.doc

В общем случае ограничения в основной задаче ЛП могут быть записаны в форме неравенств со знаками $\leq, \geq$, а также в форме равенств. В этой ситуации не удаётся определить опорное решение за счёт введения только дополнительных переменных ,а именно в каждое неравенство в основной задаче ЛП вводится дополнительная переменная со знаком «плюс» (+), если неравенство имеет знак ≤ и со знаком «минус» (–), если неравенство имеет знак ≥. Кроме этого, в каждое неравенство со знаком ≥ вводится искусственная переменная со знаком «плюс».

Полное описание алгоритма симплекс-метода содержится в http://www.fm.cdml.ru/otherfiles/lp.doc

Решим геометрически следующую задачу ЛП:

$$\Omega: 5\cdot x_1 + x_2 \geq 5;\ x_1 + 5\cdot x_2 \geq 5;$$
$$3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \leq 6;\ -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \leq 6$$
$$z = x_1 + x_2 (\max, \min).$$

Прежде всего, выберем некоторый масштаб и построим О.Д.Р. данной задачи. Для этого строим опорные прямые L$_1$: $5\cdot x_1 + x_2 = 5$; L$_2$: $x_1 + 5\cdot x_2 = 5$; L$_3$: $3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 = 6$; L$_4$: $-2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 6$ и выбрать в соответствии со значением неравенства нужную полуплоскость для каждой такой прямой. О.Д.Р. данной задачи изображена на рис. 1.

(A, B, C, D – угловые точки О.Д.Р.). Определяем координаты угловых точек A и C.

$$A = L_1 \cap L_2 :$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 5 \cdot x_2 = 5 \end{cases},$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}, \text{ т.е. } A(5/6;5/6).$$

$$C = L_3 \cap L_4 :$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 6 \\ -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6 \end{cases},$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30}{5} = 6,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30}{5} = 6, \text{т.е. } C(6;6).$$

Далее строим линии уровня целевой функции $z = x_1 + x_2$ (на рис.1.

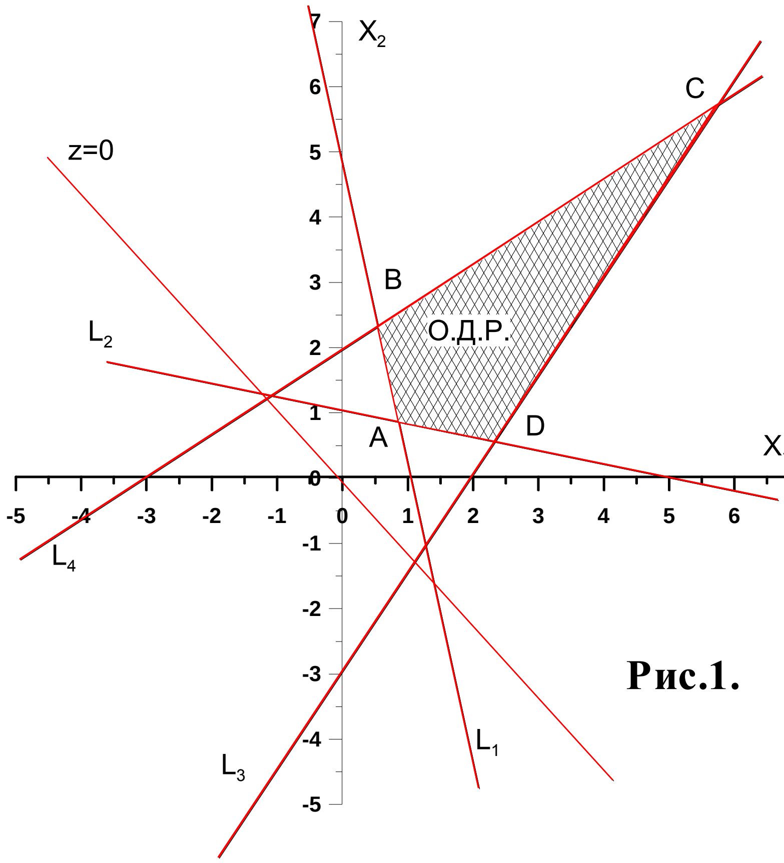

Рис.1.

изображена линия уровня $z = 0$). Таким образом, минимальное значение целевая функция достигает в точке А, $z_{\min} = 5/3$, а максимальное в точке С, $z_{\max} = 12$.

2. Задание

а) Геометрически решить задачу линейной оптимизации.

б) Решить задачу ЛП, используя симплекс-метод.

1	$\Omega: 3\cdot x_1 - x_2 \le 3;$ $2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 1;$ $-x_1 + 3\cdot x_2 \le 3$	14	$\Omega: 4\cdot x_1 - x_2 \le 4;$ $4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 1;$ $-x_1 + 4\cdot x_2 \le 4$

	$z = 2\cdot x_1 + x_2 (\max)$		$z = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 (\max)$
2	$\Omega: x_1 + 2\cdot x_2 \ge 2;\ \ x_1 + x_2 \le 3;$ $2\cdot x_1 + x_2 \ge 2$ $z = 3\cdot x_1 + x_2 (\min)$	15	$\Omega: 4\cdot x_1 - x_2 \le 4;$ $2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 1;$ $- x_1 + 5\cdot x_2 \le 5$ $z = x_1 + x_2 (\max)$
3	$\Omega: x_1 + 4\cdot x_2 \ge 4;$ $x_1 + x_2 \le 5; 4\cdot x_1 + x_2 \ge 4$ $z = 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 (\min)$	16	$\Omega: 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 10;$ $x_1 + x_2 \ge 1; -3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 12$ $z = x_1 + 2\cdot x_2 (\max)$
4	$\Omega: 2\cdot x_1 - x_2 \le 2;$ $2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 1;$ $- x_1 + 3\cdot x_2 \le 3$ $z = 4\cdot x_1 + x_2 (\max)$	17	$\Omega: 6\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 12;$ $3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \ge 1;$ $-2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 10$ $z = x_1 + x_2 (\max)$
5	$\Omega: 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 10;$ $x_1 + 2\cdot x_2 \ge 1;$ $-2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 8$ $z = x_1 + 5\cdot x_2 (\max)$	18	$\Omega: 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 8;$ $-3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 15;$ $2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 1$ $z = 2\cdot x_1 + x_2 (\max)$
6	$\Omega: 6\cdot x_1 - 3\cdot x_2 \le 18;$ $x_1 + 3\cdot x_2 \ge 1;$ $-3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 15$ $z = 2\cdot x_1 + x_2 (\max)$	19	$\Omega: x_1 + 7\cdot x_2 \ge 7; x_1 + x_2 \le 9;$ $7\cdot x_1 + x_2 \ge 7$ $z = 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 (\min)$
7	$\Omega: 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 6;$ $x_1 + x_2 \le 5; 4\cdot x_1 + x_2 \ge 4$ $z = 3\cdot x_1 + x_2 (\min)$	20	$\Omega: 2\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \ge 14;$ $x_1 + 2\cdot x_2 \le 10;$ $7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 7$ $z = 5\cdot x_1 + x_2 (\min)$
8	$\Omega: 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \ge 12;$ $x_1 + x_2 \le 7; 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 10$ $z = 2\cdot x_1 + x_2 (\min)$	21	$\Omega: 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \ge 15;$ $5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 15;$ $x_1 + 3\cdot x_2 \le 15$ $z = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 (\min)$
9	$\Omega: 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \ge 10;$ $x_1 + 2\cdot x_2 \le 12;$ $5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \ge 10$ $z = x_1 + x_2 (\min)$	22	$\Omega: 3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \ge 21;$ $x_1 + x_2 \le 9; 7\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 21$ $z = 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 (\min)$
10	$\Omega: 2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \ge 12;$ $4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \ge 12;$	23	$\Omega: 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \le 10;$ $-2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 10;$

	$x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12$ $z = 2 \cdot x_1 + x_2 (\min)$		$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 1$ $z = x_1 + 5 \cdot x_2 (\max)$
11	$\Omega : x_1 + x_2 \ge 2; x_1 / 3 + x_2 \le 1$ $2/3 \cdot x_1 - x_2 \le 1$ $z = 3 \cdot x_1 + x_2 (\max)$	24	$\Omega : x_1 + x_2 \ge 3; x_1 / 4 + x_2 \le 1;$ $2/7 \cdot x_1 - x_2 \le 1$ $z = 2 \cdot x_1 + x_2 (\max)$
12	$\Omega : x_1 + x_2 \ge 4; x_1 / 5 + x_2 \le 1$ $2/9 \cdot x_1 - x_2 \le 1;$ $z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 (\min)$	25	$\Omega : x_1 + x_2 \ge 3; x_1 / 5 + x_2 \le 1;$ $x_1 / 4 - x_2 \le 1;$ $z = 2 \cdot x_1 + x_2 (\max)$
13	$\Omega : x_1 + x_2 \ge 3; x_1 / 4 + x_2 \le 1$ $2/7 \cdot x_1 - x_2 \le 1;$ $z = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 (\max)$	26	$\Omega : x_1 + x_2 \ge 2;$ $x_1 / 3 + 2/3 \cdot x_2 \le 1;$ $2/5 \cdot x_1 - x_2 \le 1;$ $z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 (\min)$