15 Лаборатория прикладной математики.

Метод простых итераций для решения линейных систем

1.Введение

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричной форме:

$$AX = B. \tag{1}$$

Коэффициенты системы a_{ij} и правые части b_j в (1) обычно предполагаются вещественными, однако при этом не исключается возможность принадлежности их к полю комплексных чисел.

Итерационные методы в отличие от точных методов позволяют за конечное число шагов m достичь ε-окрестности решения системы (1), где ε – заданная точность. Число шагов или итераций m определяется выбором начального приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$, погрешностью ε и зависит от коэффициентов матрицы системы.

Для проведения итерационного процесса система (1) записывается в виде:

$$X = \alpha X + \beta, \tag{2}$$

Где

$$\alpha = E - ZA, \beta = ZB \quad . \tag{3}$$

Матрица Z выбирается так, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости метода простых итераций:

$$\|\alpha\| = q < 1 \tag{4}$$

Напомним,что нормой вектора B и матрицы A называются соответственно следующие числа:

$$\|B\| = \sum_{i=1}^{m} |b_i| \tag{5}$$

$$\|A\| = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}. \tag{6}$$

Процесс последовательного приближения по методу простых итераций может быть построен в соответствии с формулами

$$x^{(m+1)} = \alpha x^{(m)} + \beta, \tag{7}$$

где начальное приближение есть столбец свободных членов:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Если $\|\alpha\| = q < 1$, последовательность $x^{(m)}$ сходится по норме к истинному решению x^*, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty}\left\|x^{(m)} - x^*\right\| = 0$ и справедливы оценки:

<u>апостериорная</u>

$$\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\| \tag{9}$$

и <u>априорная</u>

$$\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \frac{q^m}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|. \tag{10}$$

Из априорной оценки (10) следует, что для достижения требуемой точности ε необходимо выполнить количество итераций m, которое является ближайшим натуральным числом, превышающим:

$$m \ge \frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon(1-q)}{\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|}\right)}{\ln q}. \tag{11}$$

Апостериорная оценка (9), как правило, используется в качестве практического критерия остановки итерационного процесса.

Если $$\left\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\right\| \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q}, \tag{12}$$

требуемая точность ε достигнута и процесс последовательного приближения к решению x^* прекращают.

<u>В качестве примера</u> решим с точностью $\varepsilon = 0,01$ методом простой итерации систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (13)$$

Все вычисления будем производить до пятого знака после запятой, округляя результат.

Преобразуем исходную систему, выразив из первого уравнения x_1, из второго – x_2, а из третьего – x_3. Получаем следующие итерационные формулы

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= 0 \cdot x_1^{(m)} - 0,25 \cdot x_2^{(m)} + 0,25 \cdot x_3^{(m)} + 0 \\ x_2^{(m+1)} &= 0,2 \cdot x_1^{(m)} + 0 \cdot x_2^{(m)} + 0,2 \cdot x_3^{(m)} - 0,2 \\ x_3^{(m+1)} &= -0,25 \cdot x_1^{(m)} + 0,25 \cdot x_2^{(m)} + 0 \cdot x_3^{(m)} - 0,25 \end{aligned}. \qquad (14)$$

Отсюда $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,25 & 0,25 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ -0,25 \end{pmatrix}$.

Найдём норму матрицы

$$\|\alpha\| = \max\ |0,2| + |-0,25|; |-0,25| + |0,25|; |0,25| + |0,2|\ = 0,5.$$

Поскольку $\|\alpha\| = q = 0,5 < 1$, то метод простых итераций, построенный в соответствии с формулами (14), сходится. В качестве нулевого приближения выберем элементы вектора-столбца β, т.е. $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = -0,2$, $x_3^{(0)} = -0,25$.

Тогда $x_1^{(1)} = -0,0125$, $x_2^{(1)} = -0,25$, $x_3^{(1)} = -0,3$. Рассчитаем теперь на основании формулы (11) количество итераций, требуемых для достижения точности $\varepsilon = 0,01$.

Имеем: $x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,0125 \\ -0,25 \\ -0,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ -0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0125 \\ -0,05 \\ -0,05 \end{pmatrix}$

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| = |-0,0125| + |-0,05| + |-0,05| = 0,1125,$$

$$m \ge \frac{\ln\left(\dfrac{0,01\cdot(1-0,5)}{0,1125}\right)}{\ln 0,5} \ge \frac{-3,11352}{-0,69311} \ge 4,49.$$

Таким образом, из априорной оценки следует, что $m = 5$. Дальнейшие исследования приведены в таблице 1.

Таблица 1

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$\sum_{i=1}^{3}\left\|x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)}\right\|$
0	0,0000	–0,20000	–0,25000	–
1	–0,01250	–0,25000	–0,30000	0,11250
2	–0,01250	–0,25250	–0,30938	0,02188
3	–0,01172	–0,26438	–0,31250	0,00578

Для сравнения приведём точное решение исходной системы:

$$x_3 = -0,31325,$$

$$x_2 = -\frac{20\cdot 130}{415} + 6 = -0,26506,$$

$$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 4\cdot(-0,26506)) = -0,012048.$$

Ответ: $x_1 = -0,012$, $x_2 = -0,264$, $x_3 = -0,313$.

2. Задание

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и методом простых итераций.

$$\begin{cases} (20N + 15,1)x_1 + (3N + 4)x_2 + (5N + 7)x_3 = 30N + 29,1; \\ x_1 + (10,5 + N)x_2 + (N + 0,01)x_3 = 2N + 1,02; \\ (N - 1,9)x_1 + (N + 4,002)x_2 + (16 + 4N)x_3 = 9\mathrm{N} + 30,1. \end{cases}$$

N- номер варианта.