Лаборатория прикладной математики.

Решение задачи Коши методом Эйлера.

1. Введение

Опишем метод Эйлера на примере задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Разобьем отрезок $[x_0, b]$, где ищется решение задачи (1), (2) на n равных отрезков, длиной $h = (b - x_0)/n$. Множество точек $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0, n}$ называется сеткой, а h – шагом сетки.

Идея метода Эйлера заключается в том, что на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ производная y', приближенно заменяется отношением приращения функции $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ к приращению аргумента $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$. Расчётные формулы метода Эйлера имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_0 + ih, & i = \overline{0, n-1} \\ y_{i+1} = y_0 + hf(x_i, y_i), & i = \overline{0, n-1} \end{cases} \tag{3}$$

x_0, y_0 – известны из условия (2).

Сказанное иллюстрирует рис.1

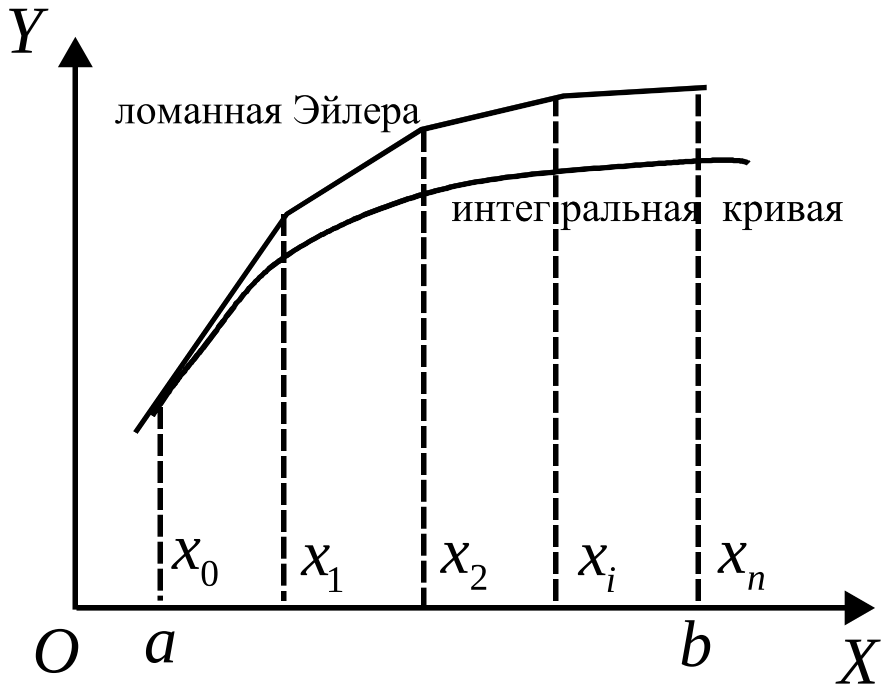

Рисунок 1

Локальная погрешность метода Эйлера, обусловленная заменой производной отношением приращений функции и аргумента на каждом отдельном шаге, прямо пропорциональна величине шага во второй степени

$$\varepsilon_{лок} = Ch^2,\ C = const. \tag{4}$$

Глобальная погрешность метода Эйлера, под которой понимается отклонение приближенного решения от истинного после n кратного применения формул (3) без учета вычислительной погрешности, определяется формулой

$$\varepsilon_{глоб} = C_1 h,\ C_1 = const. \tag{5}$$

Заметим, что постоянные C и C_1 определяются величинами второй производной.

Вычислительная погрешность, обусловленная накоплением ошибок округления, неизбежных в ЭВМ из-за ограниченности машинной арифметики, после n шагов обратно пропорциональна величине h

Общая погрешность метода Эйлера (рисунок 2)

$$\varepsilon_{общ} = \varepsilon_{глоб} + \varepsilon_{выч} = Ch + \frac{A}{h}.$$

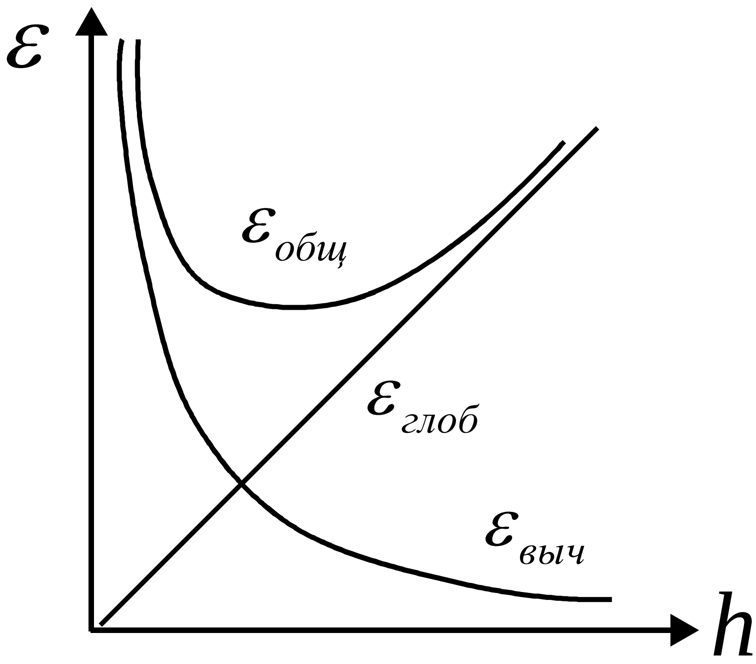

Рисунок 2

Порядком точности метода (или просто порядком метода) называется число, равное показателю степени шага h в формуле для глобальной погрешности.

Метод Эйлера – метод первого порядка точности. Это необходимо учитывать при использовании правила Рунге практической оценки погрешности. Согласно правилу Рунге задача Коши вначале решается на сетке с шагом $2h$, а затем на сетке с шагом h. Погрешность решения приближенно оценивается по формуле

$$\varepsilon_i \approx \frac{|y_{2hi} - y_{hi}|}{2^k - 1}, \tag{6}$$

где y_{2hi} – решение, рассчитанное с шагом $2h$, y_{hi} – решение, рассчитанное с шагом h, k – порядок точности метода (для метода Эйлера $k=1$).

В качестве примера проведем расчеты по формулам метода Эйлера с шагом h=0,1 для задачи Коши $y' = -2xy$, $0<x<1$, $y(0) = 1$.

Решение. Формулы для расчета имеют вид $x_0 = 0$,

$$x_i = x_0 + 0{,}1i$$

$$y_{i+1} = y_i - 2x_i y_i h = y_i(1 - 2x_i h) = y_i(1 - 1{,}2x_i); \quad i = 0,1,2,3,...,9.$$

Точное решение имеет вид $y = e^{-x^2}$. Результаты сравнительного анализа точного решения и расчетных значений, полученных по формулам метода Эйлера, помещены в таблице 1.

Таблица 1

i	0	1	2	3	…	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	…	0,9	1,0
y_i	1	1	0,980	0,941	…	0,465	0,382
$y_{i точн}$	1	0,990	0,961	0,914	…	0,445	0,368

2. Задание

Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x)),\ x \in [x_0, b],\ y(x_0) = y_0$ на заданном отрезке $x \in [x_0, b]$ с шагом $h = 0{,}1$:

а) методом Эйлера;

б) найти точное решение;

в) оценить погрешность с помощью правила Рунге (6);

г) на одном рисунке построить графики точного решения и найденного приближенного решения;

Варианты заданий:

1. $y' = \dfrac{y}{x} + x^2,\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 1.$
2. $y' = \dfrac{y}{x} + x^3,\ x \in [x_0 = 0{,}5; b = 1{,}5],\ y(x_0) = 0{,}1.$
3. $y' = -xy - x^3,\ x \in [x_0 = 0{,}5; b = 1{,}5],\ y(x_0) = 1{,}1.$
4. $y' = y ctg x + 2x \sin x,\ x \in [x_0 = \pi/2; b = \pi/2 + 1],\ y(x_0) = 1.$
5. $y' = \dfrac{y}{x+2} + 2x + x^2,\ x \in [x_0 = 0; b = 1],\ y(x_0) = 2.$
6. $y' = \dfrac{(2x-1)y}{x^2} + 1 + x^2,\ x \in [x_0 = 2; b = 3],\ y(x_0) = 1.$
7. $y' = -2xy - 2x^3,\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 3.$
8. $y' = \dfrac{y}{x} + 5x \cos x,\ x \in [x_0 = \pi/5; b = \pi/5 + 1],\ y(x_0) = 1.$
9. $y' = -xy - x^4,\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 2.$

10. $y' = -ytgx + \cos^2 x,\ x \in [x_0 = 0; b = 1],\ y(x_0) = 1$.

11. $y' = \dfrac{3y}{x} + x^3 e^x,\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = e$.

12. $y' = -\dfrac{2y}{x} + x^{-2},\ x \in [x_0 = 3; b = 4],\ y(x_0) = 1$.

13. $y' = 4xy + x,\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 0{,}75$.

14. $y' = -2xy + 2xe^{-x^2},\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 5$.

15. $y' = -ytgx + \sin 2x,\ x \in [x_0 = \pi/4; b = \pi/4 + 1],\ y(x_0) = 1$.

16. $y' = -\dfrac{3y}{x} + \dfrac{2}{x^3},\ x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 3$.

17. $y' = \dfrac{2x(x-y)}{1+x^2}, x \in [x_0 = 0; b = 1],\ y(x_0) = 5$.

18. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}, x \in [x_0 = e; b = e + 1],\ y(x_0) = \dfrac{1}{e}$.

19. $y' = \dfrac{2y}{x+1} + (x+1)^3, x \in [x_0 = 0; b = 1],\ y(x_0) = 2$.

20. $y' = \dfrac{y}{x} + 9x^3, x \in [x_0 = 2; b = 3],\ y(x_0) = 1$.

21. $y' = \dfrac{y}{x} + x\sqrt{x}, x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 1$.

22. $y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{(x+1)e^x}{x}, x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = e$.

23. $y' = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{\cos x}{x}, x \in [x_0 = \pi/4; b = \pi/2],\ y(x_0) = 1$.

24. $y' = \dfrac{y}{x} + x^2\sqrt{x}, x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 4$.

25. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt[3]{x}, x \in [x_0 = 1; b = 2],\ y(x_0) = 1$.